$$= \left((\nabla_q f)^T g + f(\nabla_q g)^T\right)\nabla_p h - \left((\nabla_p f)^T g + f(\nabla_p g)^T\right)\nabla_q h$$

$$= \left[(\nabla_q f)^T \nabla_p h - (\nabla_p f)^T \nabla_q h\right] g + f\left[(\nabla_q g)^T \nabla_p h - (\nabla_p g)^T \nabla_q h\right]$$

$$= [f, h]\, g + f\, [g, h].$$

(iii) $[[f,g],h] + [[h,f],g] + [[g,h],f] = 0$

# Transformaciones canónicas

## Definición

Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ abierto, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{2n}$ clase $C^r$, $r \geq 1$.

Decimos que $f$ es simpléctica si,
($Df(x)$ matriz jacobiana en $x$)

$$[Df(x)]^T \, J \, [Df(x)] = J.$$

Si $f$ es simplectica, decimos que $f$ es una transformación canónica.

Si $\exists$ $f^{-1}$ clase $C^r$ entonces $f$ es un difeomorfismo simpléctico.

$\Rightarrow$ $f$ es u simplectomorfismo.

## Notemos que

si $f$ es simpléctica

$$[Df(x)]^T J [Df(x)] = J \Rightarrow \det\left(Df^T(x)\, J\, Df(x)\right) = \det J$$

$$\left( J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \det(Df(x))^2 \det J = \det J$$

$$\Rightarrow \det(Df(x)) = \pm 1 \neq 0$$

**Def**

Sea $\mathbb{A}$ matriz de $2n\times 2n$.
Decimos que $\mathbb{A}$ es simpléctica si y sólo si $\mathbb{A}^T J \mathbb{A} = J$

(De esta forma decimos que $f$ es simpléctica si $Df(x)$ es una matriz simpléctica $\forall x$)

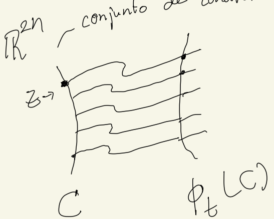
Veamos que los flujos de sistemas Hamiltonianos son simplectomorfismos.

Sist Hamiltoniano

$$\dot{z} = J\nabla H(z) \quad \text{(caso autónomo)}$$

↓ da lugar a un flujo.

$\phi_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \quad \forall t$




para una $t$ dada.

el flujo satisface

$$\frac{d}{dt}\phi_t(z) = J\nabla H(\phi_t(z)) \quad \forall z, t$$

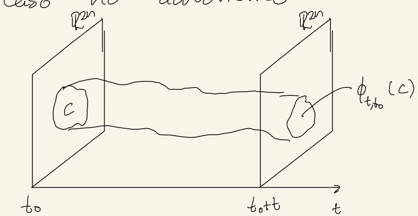
$$\phi_0(z) = z$$

$$z \in C$$

Entendemos a $\phi_t$ como una familia uniparamétrica de difeomorfismos $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$.

(Nota la inversa de $\phi_t$ es $\phi_{-t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$) $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_0 = Id$

Caso no autónomo




$\dot{z} = J\nabla H(z,t)$

con flujo

$\phi_{t,t_0}(z)$ (depende de $t_0$)

$$\frac{d}{dt}\phi_{t,t_0}(z) = J\nabla H(\phi_{t,t_0}(z), t) \quad \forall z \in U \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\phi_{t_0,t_0}(z) = z$$

$\phi_{t,t_0}$ es una familia uniparamétrica de difeomorfismos de $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$

**Teorema**

Sea $\phi_{t,t_0}(z) : \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ el flujo de la ecuación diferencial $\dot{z} = J\nabla H(z,t)$, ($H$ en $C^2$, $z$).
Entonces $\phi_{t,t_0}$ es simpléctica $\forall z, t$, (y $\forall t_0$).

**Dem**

Notación $\phi = \phi_{t,t_0}(z)$, $D\phi = D_z\phi = D_z\phi_{t,t_0}(z)$ (matriz de $2n\times 2n$)

Por demostrar $D\phi$ es simpléctica.

$$[D\phi]^T J\, D\phi = J \quad , \forall z, t$$

Primero vemos que para $t = t_0$, se cumple.

$$\phi = \phi_{t_0,t_0}(z) = z \implies D\phi = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}_{2n\times 2n} = Id_{2n}$$

$$[D\phi]^T J [D\phi] = Id_{2n}^T\, J\, [Id_{2n}] = J.$$

Es suficiente demostrar que

$$\frac{d}{dt}\left([D\phi]^T J [D\phi]\right) = 0_{2n}$$

Regla del producto

$$\frac{d}{dt}\left([D\phi]^T J [D\phi]\right) = \left(\frac{d}{dt}[D\phi]^T\right) J [D\phi] + [D\phi]^T J \frac{d[D\phi]}{dt}$$

Vamos a demostrar que

$$\frac{d}{dt} D\phi = J [\nabla_z^2 H(\phi)] [D\phi]$$

donde $\nabla^2 H$ es la matriz Hessiana de H

$$[\nabla_z^2 H(\phi)]_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial\phi_i \partial\phi_j}(\phi,t) \overset{H\in C^2}{=} \frac{\partial^2 H}{\partial\phi_j \partial\phi_i}(\phi,t)$$

$\nabla_z^2 H$ es simétrica.

$$H \in C^2 \Rightarrow \nabla_z H \in C^1 \Rightarrow J\nabla_z H \in C^1 \Rightarrow \phi \in C^2$$

Por Teo de existencia y unicidad.

$$\frac{d}{dt} D\phi = \frac{d}{dt} D_z \phi = D_z\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = D\dot{\phi}$$

(intercambiamos $\partial_t \partial_{z_i}$ por $\partial_{z_i}\partial_t$)

$$\frac{d}{dt} D\phi = D\dot{\phi} = D_z\left(J \nabla_z H(\phi(z),t)\right) = J \nabla_z^2 H(\phi,t) [D_z\phi]$$

$$\frac{d}{dt}[D\phi]^T = [D_z\phi]^T \nabla_z^2 H(\phi,t)^T J^T$$

$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, $J^T = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $JJ = -Id_{2n}$

$$J J^T = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = Id_{2n}$$

$$\frac{d}{dt}\left([D\phi]^T J [D\phi]\right) = \left(\frac{d}{dt}[D\phi]^T\right) J [D\phi] + [D\phi]^T J \frac{d[D\phi]}{dt}$$

$$= [D_z\phi]^T \nabla_z^2 H(\phi,t) \cancel{J^T J} [D\phi] + [D\phi]^T \overset{-Id_{2n}}{\cancel{JJ}} \nabla_z^2 H(\phi,t) [D\phi]$$

$$= [D_z\phi]^T \nabla_z^2 \cancel{H(\phi,t)} [D\phi] - [D\phi]^T \cancel{\nabla_z^2 H(\phi,t)} [D\phi]$$

$$= 0_{2n}$$

Por lo tanto $\phi_{t,t_0}(z)$ es una transformación simpléctica con inversa $\phi_{-t,t_0}(z)$.

$\phi$ es un simplectomorfismo $\forall t$. //

Ejemplo

Sistemas Hamiltonianos lineales en $\mathbb{R}^{2n}$

$\dot{z} = J\nabla H$ con $H(z) = \frac{1}{2} z^T B z$, B matriz de 2nx2n

$$(\nabla H)_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{2n} B_{kl} z_k z_l = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n} B_{ki} z_k + \sum_{l=1}^{2n} B_{il} z_l\right)$$

entonces $\nabla H = \frac{1}{2}(B^T + B) z$, $\dot{z} = \frac{1}{2} J (B^T + B) z$

Notar que $\frac{1}{2}(B^T+B)$ es una matriz simétrica.
(se llama la simetrización de $B$)

Si $B$ fuera simétrica entonces $\frac{1}{2}(B^T+B) = B$

$$\dot{z} = J\frac{(B^T+B)}{2}z \qquad \text{sea} \quad A = \frac{B^T+B}{2}$$

$$\dot{z} = JAz \qquad (A \text{ es simétrica})$$

El flujo de este sistema lineal es

$$\phi_t(z) = e^{tJA}z$$

Como el sistema es Hamiltoniano, entonces $e^{tJA}z$ es un simplectomorfismo. //