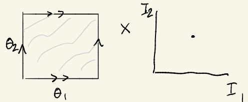
Si $H = H(I)$

$\dot{\theta}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j}$, $\dot{I}_j = 0$, I_j = Constante $\forall j$

si $n=2$



Esto es un toro invariante.

I_j: cantidades conservadas.

Algunos sistemas Hamiltonianos se pueden escribir como $H=H(I)$ después de un cambio de variables que preserva la estructura Hamitoniana de las ecuaciones de movimiento.

Sea $H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} q^2$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q$$

Sean $q(I,\theta)$, $p(I,\theta)$

$$q(I,\theta) = \left(\frac{2I}{\omega}\right)^{1/2} \sin\theta$$

$$p(I,\theta) = (2I\omega)^{1/2} \cos\theta$$

$$H(\theta,I) = H(q(I,\theta), p(I,\theta)) = \frac{\cancel{2}I\omega}{\cancel{2}}\cos^2\theta + \frac{\omega^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}I}{\cancel{\omega}}\sin^2\theta$$

$$H(\theta, I) = H(I) = \omega I$$

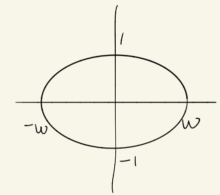
Ecs. de Hamilton

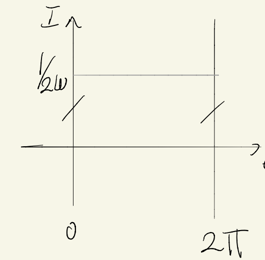
$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega \qquad \theta(t) = \omega t + \theta_0$$

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

Variables

(q,p) (θ, I)





Formulación Lagrangiana.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad 2^{do} \text{ orden}$$

Necesitamos $2n$ conds. iniciales.

n q_i's
n $\dot{q}_i$'s } para un tiempo t_1

ó q_i's en tiempos t_1 y t_2

Formulación Hamiltoniana

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Necesitamos una condición inicial en la variedad $2n$ dimensional.

Para tenerer una transformacion escogemos las variables del espacio de configuraciones como las q_i

Para las p_i's

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad \ldots \quad (Leg)$$

A las cantidades (q_i, p_i) se les conoce como variables canónicas.

Se hace una transformación de Lagrangiano a Hamiltoniano

$(q, \dot{q}, t)$ a (q, p, t)

p está relacionada con q y $\dot{q}$

Conservación de la energía

Prop

Sea $\dot{z} = J \nabla H(z,t)$, $z \in (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$, $H = H(z,t)$ y $z(t)$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton.

Entonces

$$\frac{d}{dt} H(z(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} H(z(t), t)$$

(si $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ entonces H = constante a lo largo de las trayectorias.

Dem

$$\frac{d}{dt} H(z(t), t) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right\} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \cancel{\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}} \right\} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t}(z(t), t) \quad //$$

Transformada de Legendre

sist Lagrangiano $\Leftrightarrow$ sist. Hamiltoniano

Ej $\mathbb{R}^1$ sist. Lagrangiano $\mathcal{L}(q, v, t)$, $q \in \mathbb{R}$

Def

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(q, v, t) \quad \text{momento generalizado.}$$

(Sist. mecánico $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - U(q,t)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = mv = p \quad)$$

Con la definición $p = p(q, v, t)$

Si suponemos la transformación de arriba.

$$v = v(q, p, t) \quad \forall\, q, t$$

La condición suficiente es que

$$\frac{\partial p}{\partial v}(q, v, t) \neq 0 \iff \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^2}(q, v, t) \neq 0, \forall q, t.$$

Def

$$H(q,p,t) = p\,v(q,p,t) - \mathcal{L}(q, v(q,p,t), t)$$

(Hamiltoniano <=> energía del sistema)

Sist. mecánico

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - U(q,t), \quad p = mv$$

$$H = p \cdot \frac{p}{m} - \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m}\right)^2 - U(q,t) \right]$$

$$= \frac{1}{2m} p^2 + U(q,t)$$

Proposición

Tenemos que $q(t), v(t) = \dot{q}(t)$ satisfacen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$ si y sólo si

$q(t),\ p(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(q, v, t)$ satisfacen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$ con H

Dem

[=>] $$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left[p\,v(q,p,t) - \mathcal{L}(q, v(q,p,t), t)\right]$$

$$= v(q,p,t) + \cancel{p\frac{\partial v}{\partial p}} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}} = v = \dot{q}(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left[p\,v(q,p,t) - \mathcal{L}(q, v(q,p,t), t)\right]$$

$$= \cancel{p\frac{\partial v}{\partial q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

$$= -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{d}{dt} p = -\dot{p}$$

[<=] $$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow \dot{p} = +\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

También

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{q} = v(t)$$

$\Rightarrow$ E-L. //