Sistemas Hamiltonianos

Ecuación de Hamilton en $\mathbb{R}^n$

$q \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$, $z = (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$

$H : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(q,p,t) \mapsto H(q,p,t)$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q,p,t) \qquad i = 1,\dots,n$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q,p,t)$$

sistema Hamiltoniano: $2n$ ecs. de primer orden

H: Hamiltoniano del sistema.

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ sistema autónomo

$\neq 0$ no autónomo

Ej 1 $\quad m\ddot{x} = -\nabla U(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad L = \frac{1}{2} m |\dot{x}|^2 - U(x,t) \right)$$

Sea $q = x$ posición, $p = m\dot{q}$ momento

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{m} p \\ \dot{p} &= -\nabla U(q,t) \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

con $H = \frac{1}{2m} p^2 + U(q,t)$

($= K + U$ — energía total del sistema).

Ej 1.1 (Estructura simpléctica)

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \nabla_p H \\ \dot{p} &= -\nabla_q H \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{pmatrix}$$

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ identidad de $n \times n$

J se llama matriz simpléctica.

$z = (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\boxed{\dot{z} = J \nabla_z H}$$

Modelación Lagrangiana vs Modelación Hamiltoniana

1. M espacio de conf,
2. L, Lagrangiano (TM)
3. evolución dada por E-L (principio de acción estacionaria).

1. Espacio fase (variedad simpléctica)
2. H, Hamiltoniano (Esp. fase $\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
3. Ecs de Hamilton.
   (posiciones, momentos) coordenadas canónicas.

(El espacio fase se parece a TM pero en realidad es T^*M)

<u>Ejemplo 2</u> Vórtices puntuales en $\mathbb{R}^2$

fluido en $\mathbb{R}^n$, $n=1,2,3$ (densidad constante)

Velocidad Euclidiana $u(x,t)$, $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

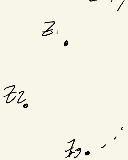
$u(x,t)$ es la velocidad de la "partícula" que pasa por el punto $x \in \mathbb{R}^n$ al tiempo $t \in \mathbb{R}$

fluidos incompresibles $\nabla \cdot u = 0$

Ecuaciones de Euler.

La solución en $\mathbb{R}^2$ se puede aproximar por

$z_1, \dots, z_s$: posiciones de s vórtices puntuales $z_i = (x_i, y_i)$



$$u(z,t) = \sum_{i=1}^{s} k_i \left[\frac{-(y-y_i)}{|z-z_i|^2}, \frac{x-x_i}{|z-z_i|^2} \right]$$

2) La evolución de los $z_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

con $$H = \sum_{\substack{\lambda,\mu=1 \\ \lambda<\mu}}^{s} k_\lambda k_\mu \log\left(\sqrt{(x_\lambda - x_\mu)^2 + (y_\lambda - y_\mu)^2}\right)$$

i.e. $q_i = x_i$ "posiciones"

$p_i = y_i$ "momentos"

$\nabla \times u = 0$ (1 forma cerrada)

$$\int_C u = 2\pi k_i \quad \left(\text{"} = \int_D \nabla \times u \text{"} \right)$$

vorticidad concentrada en un punto.

<u>Ej 3</u> Coordenadas de "acción ángulo".

Espacio fase $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\theta, I)$

"ángulos" "acciones"

Si tenemos un Hamiltoniano

$H(\theta, I, t)$

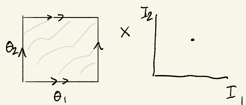
$$\dot{\theta}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j}$$

$$\dot{I}_j = -\frac{\partial H}{\partial \theta_j}$$

Si $H = H(I)$

$$\dot{\theta}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j}, \quad \dot{I}_j = 0, \quad I_j = \text{Constante} \ \forall j$$

si $n=2$



Esto es un toro invariante.

I_j: cantidades conservadas.

Algunos sistemas Hamiltonianos se pueden escribir como $H=H(I)$ después de un cambio de variables que preserva la estructura Hamitoniana de las ecuaciones de movimiento.

Sea $H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} q^2$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q$$

Sean $q(I,\theta)$, $p(I,\theta)$

$$q(I,\theta) = \left(\frac{2I}{\omega}\right)^{1/2} \sin\theta$$

$$p(I,\theta) = (2I\omega)^{1/2} \cos\theta$$

$$H(\theta,I) = H(q(I,\theta), p(I,\theta)) = \frac{2I\omega}{\cancel{2}}\cos^2\theta + \frac{\omega^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}I}{\cancel{\omega}}\sin^2\theta$$

$$H(\theta,I) = H(I) = \omega I$$

Ecs. de Hamilton

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega \qquad \theta(t) = \omega t + \theta_0$$

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

Variables

(q,p) $\quad$ (θ, I)