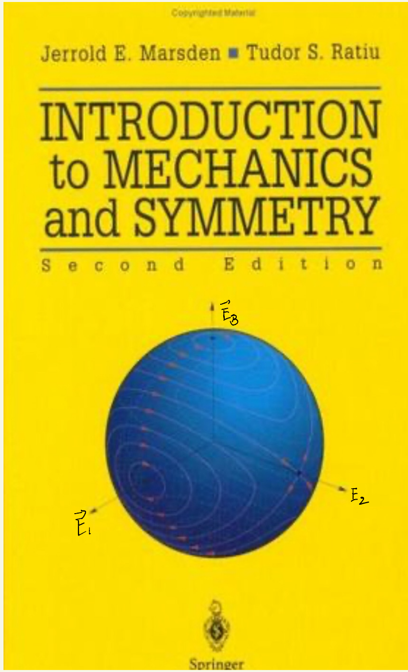


Hemos visto la dinámica del cuerpo rígido libre,

Ecs de movimiento → Ecuaciones de Euler.

Cuando tenemos fuerzas externas

$$\dot{\vec{m}} = \vec{n}$$ donde $\vec{n}$ es la torca total

$$\vec{n} = \sum_i \vec{q}_i \times \vec{F}_i$$

En el marco de referencia del cuerpo tenemos

$$\vec{M} = B_t^{-1} \vec{m}$$

$$\dot{\vec{M}} = \vec{M} \times \vec{\Omega} + B_t^{-1} \dot{\vec{m}} = \vec{M} \times \vec{\Omega} + B_t^{-1} \vec{n}$$

$$= \vec{M} \times \vec{\Omega} + \vec{N}$$

Elipsoide de inercia

Definición

El elipsoide $\mathcal{E} = \{U : \langle AU, U \rangle = 1\}$ se llama el elipsoide de inercia del cuerpo en el punto O.

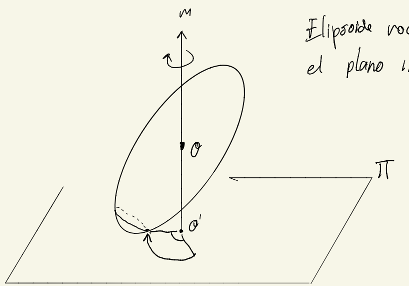
En términos de los ejes principales de inercia $\vec{E}_i$, la ecuación para el elipsoide es,

$$I_1 U_1^2 + I_2 U_2^2 + I_3 U_3^2 = 1$$

Los ejes principlales del elipsoide de inercia están dirigidos a lo largo de los ejes principales del tensor de inercia. Sus longitudes son inversamente proporcionales a $\sqrt{I_i}$

Teorema de Poinsot

El elipsoide de inercia rueda sin resbalar sobre un plano estacionario perpindicular al momento angular $\vec{m}$.



Elipsoide rodando sobre el plano invariante.

El elipsoide de inercia esta quieto en el marco de referencia del cuerpo y se mueve en el marco del espacio.

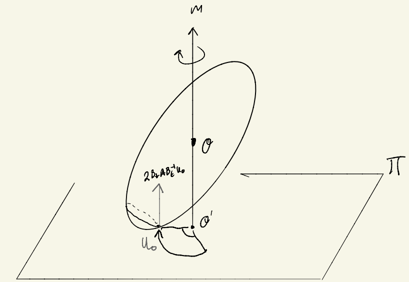
La dinámica está dada por la rotación

$$B_t(\xi) = \{ u : \langle A B_t^{-1} u , B_t^{-1} u \rangle = 1 \}$$

$$= \{ u : \langle B_t A B_t^{-1} u , u \rangle = 1 \}$$

Tomamos π como el planto tangente al elipsoide y normal $\vec{m}$.

Hay 2 planos con esta misma propiedad. y en el punto de tangencia, el vector normal al elipsoide es paralelo a $\vec{m}$.



Si $u_0 \in B_t(\xi)$, entonces la normal a $B_t(\xi)$ sobre el punto u_0 es $2 B_t A B_t^{-1} u_0$

Buscamo un u_0 tal que

$$2 B_t A B_t^{-1} u_0 = \lambda \vec{m} \quad y \quad u_0 \in B_t^{-1}(\xi)$$

Podemos tomar

$$u_0 = \frac{\omega(t)}{\sqrt{2K}}$$

Tenemos que $K = \frac{1}{2} \vec{M} \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{m} \cdot \vec{\omega}$

$$= \frac{1}{2} \langle A\vec{\Omega}, \vec{\Omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle A B_t^{-1} \vec{\omega}, B_t^{-1} \vec{\omega} \rangle$$

$$2K = \langle B_t A B_t^{-1} \vec{\omega}, \vec{\omega} \rangle$$

Entonces

$$\left\langle B_t A B_t^{-1} \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2K}}, \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2K}} \right\rangle = 1$$

$u_0 \in B_t(\xi)$ por definición.

Tarea

Demostrar que las componentes conexas de la variedad invariante V_c (2-dimensional) en el espacio 6-dimensional $TSO(3)$ son toros y que se pueden escoger coordenadas φ_1 y φ_2 mod 2π sobre ellas tal que

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(c) \quad \text{y} \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2(c)$$

(Soluciones periódicas o cuasi-periódicas dependiendo de $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \begin{cases} \mathbb{Q} \\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$