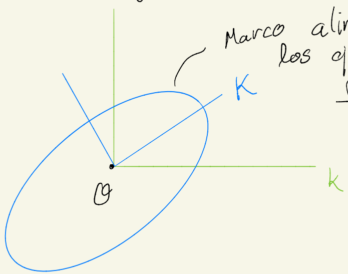
Ecuaciones de Euler

Cuerpo rígido con punto estacionario. O

Marco alineado con los ejes principales de inercia.



$$\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \Omega_1 \\ I_2 \Omega_1 \\ I_3 \Omega_3 \end{pmatrix} = A\vec{\Omega}$$

Ecuaciones de Euler

Conservación del momento angular

$\vec{m} = B_t \vec{M}$ ($\vec{m}$ es contante de movimiento)
$(\dot{\vec{m}} = 0)$

$\vec{M}$ no es constante

$$\left(B_t^{-1} B_t = I \Rightarrow \dot{B}_t^{-1} B_t + B_t^{-1} \dot{B}_t = 0 \qquad \dot{B}_t^{-1} = -B_t^{-1} \dot{B}_t B_t^{-1} \right)$$

$$\vec{M} = B_t^{-1} \vec{m}$$

$$\dot{\vec{M}} = -B_t^{-1} \dot{B}_t B_t^{-1} \vec{m} = -\hat{\Omega} \vec{M} = \vec{M} \times \vec{\Omega}$$

Teo $\dot{\vec{M}} = \vec{M} \times \vec{\Omega}$

(Arnold)

$\underline{X} \in K$

$$\dot{B}_t \underline{X} = B_t (\vec{\Omega} \times \underline{X})$$

$$\vec{m} = B_t \vec{M}$$

$$\dot{\vec{m}} = \dot{B}_t \vec{M} + B_t \dot{\vec{M}} = B_t \dot{\vec{M}} + B_t (\vec{\Omega} \times \vec{M}) = 0$$

$$\dot{\vec{M}} + \vec{\Omega} \times \vec{M} = 0, \Rightarrow \dot{\vec{M}} = \vec{M} \times \vec{\Omega}$$

$\dot{\vec{M}} = \vec{M} \times \vec{\Omega}$ son las ecuaciones de Euler.

Si

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

$M_i = I_i \Omega_i$ y $\dot{\vec{M}} = \vec{M} \times \vec{\Omega}$ son un sistema de 3 ecuaciones.

$$\dot{\vec{M}} = \begin{pmatrix} \frac{dM_1}{dt} \\ \frac{dM_2}{dt} \\ \frac{dM_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ I_1\Omega_1 & I_2\Omega_2 & I_3\Omega_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{vmatrix}$$

$$\dot{\vec{M}} = \begin{pmatrix} \frac{dM_1}{dt} \\ \frac{dM_2}{dt} \\ \frac{dM_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ \frac{M_1}{I_1} & \frac{M_2}{I_2} & \frac{M_3}{I_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_2M_3}{I_3} - \frac{M_2M_3}{I_2} \\ -\frac{M_1M_3}{I_3} + \frac{M_1M_3}{I_1} \\ \frac{M_1M_2}{I_2} - \frac{M_1M_2}{I_1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dM_1}{dt} = a_1 M_2M_3 \qquad a_1 = \frac{(I_2-I_3)}{I_2I_3}$$

$$\frac{dM_2}{dt} = a_2 M_3M_2 \qquad a_2 = \frac{(I_3-I_1)}{I_3I_1} \qquad a_3 = \frac{(I_1-I_2)}{I_1I_2}$$

$$\frac{dM_3}{dt} = a_3 M_1M_2$$

En términos de las componentes de la $\vec{\Omega}$,

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = (I_2-I_3)\Omega_1\Omega_2$$

$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} = (I_3-I_1)\Omega_3\Omega_1$$

$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = (I_1-I_2)\Omega_1\Omega_2$$

Tenemos 2 cantidades conservadas,

(Energía cinética)

$$2K = \vec{M}\cdot\vec{\Omega} = M_1\Omega_1 + M_2\Omega_2 + M_3\Omega_3$$
$$= I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 \leftarrow$$
$$\left(= \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = cte\right) \text{(elipsoide)}$$

$$2\dot{K} = 2I_1\dot{\Omega}_1\Omega_1 + 2I_2\dot{\Omega}_2\Omega_2 + 2I_3\dot{\Omega}_3\Omega_3$$
$$= 2(I_2-I_3)\Omega_1\Omega_2\Omega_3 + 2(I_3-I_1)\Omega_1\Omega_2\Omega_3 + 2(I_1-I_2)\Omega_1\Omega_2\Omega_3$$
$$= 2\Omega_1\Omega_2\Omega_3\left((\cancel{I_2}-\cancel{I_3}) + (\cancel{I_3}-\cancel{I_1}) + (\cancel{I_1}-\cancel{I_2})\right) = 0$$

(Norma del Momento angular)

$$\|\vec{M}\|^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = cte$$

$$\frac{d}{dt}\|\vec{M}\|^2 = \frac{d}{dt}\,\vec{M}\cdot\vec{M} = 2\vec{M}\cdot\dot{\vec{M}} = 2\vec{M}\cdot(\vec{M}\times\vec{\Omega}) = 0$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = cte \quad \text{(esfera)}$$

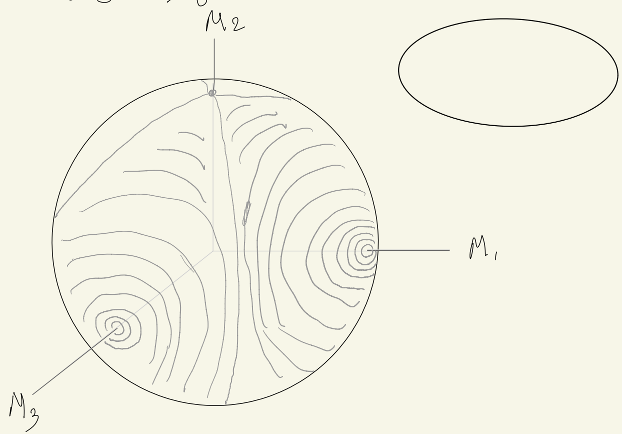
La conclusión es que las soluciones viven en la intersección entre la esfera

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = C_1$$

y la elipsoide

$$\frac{M_1^2}{I_1^2} + \frac{M_2^2}{I_2^2} + \frac{M_3^2}{I_3^2} = C_2$$

(Pensamos que $I_3 < I_2 < I_1$)



<u>Teorema</u> (Estabilidad del cuerpo rígido)

Sean $I_3 < I_2 < I_1$, entonces las soluciones estacionarias

$$\vec{M} = M_1 \vec{E}_1, \quad \vec{M} = M_3 \vec{E}_3$$

son (Lyapunov) estables, mientras que las rotaciones

$$\vec{M} = M_2 \vec{E}_2$$

son inestables. //

¡Dzhanibekov!