La invarianza por rotaciones nos da la preservación del momento angular (3 componentes)

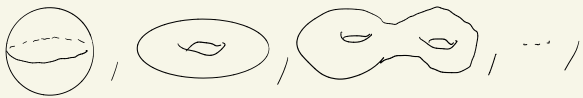
→ También tenemos la conservación de la energía. 1 componente.

A final nos queda una variedad de dimensión 2.

Consideramos el caso cuando $E = C > 0$
- entonces el espacio tangente no tiene puntos singulares.

En topología, las variedades de dim 2 son

Toro con n-asas,



↳ ¡El toro admite campos vectoriales sin puntos singular!

- El espacio fase del cpo rígido es en general un toro dos dimensional con dinámica cuasi-periódica.

El tensor de inercia.

$q \in k$ punto representado en el marco de referencia

$Q \in K$, $Q = B_t^{-1} q$ mismo vector pero en el marco del cuerpo.

$v = \dot{q} \in k$ velocidad absoluta en el marco de ref.

$V = B_t^{-1} v$ " " en el cuerpo.

$\omega \in k$ velocidad angular

$\Omega \in K$, $\Omega = B_t^{-1} \omega$

$\vec{m} \in k$ momento angular del punto q en el marco del espacio

$\vec{m} = q \times m v$

$\vec{M} \in K$ $\quad \vec{M} = B_t^{-1} \vec{m}$ ... en el cuerpo.

Momento angular del cuerpo (respecto a O)

$$B_t^{-1}(u \times w) = (B_t^{-1} u) \times (B_t^{-1} w)$$

$$B_t^{-1} \in SO(3)$$

El momento angular de una masa en q

$$\vec{m} = q \times (m v) = m\,(q \times (\omega \times q))$$

$$\vec{M} = B_t^{-1} \vec{m} = m\,(B_t^{-1} q \times B_t^{-1}(\omega \times q))$$
$$= m\, Q \times (\vec{\Omega} \times Q)$$

$\vec{M} = m\, Q \times (\vec{\Omega} \times Q)$

- $\vec{M}$ depende linealmente de $\vec{\Omega}$.

Existe un operador $A: K \to K$ lineal tal que $A\vec{\Omega} = \vec{M}$

$\to$ A depende de Q y la masa.

Lema

El operado A es simétrico.

Dem

$X, Y \in K \Rightarrow$

$$\langle AX, Y\rangle = m\langle Q \times (X \times Q), Y\rangle$$

$$= m\langle X \times Q, Y \times Q\rangle = m\langle X, Q \times (Y \times Q)\rangle$$

$$= \langle X, AY\rangle$$

A es simétrico. //

Notar que

$v = \vec{\omega} \times q$, $\|v\| = \|\vec{\omega} \times q\| = \|B_t^{-1}(\vec{\omega} \times q)\| = \|\vec{\Omega} \times Q\|$

$= \|V\|$

Corolario

La energía cinética de un punto de un cuerpo es una forma cuadrática con respecto al vector de velocidad angular $\vec{\Omega}$, es decir

$$K = \frac{1}{2}\langle A\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle = \frac{1}{2}\langle \vec{M}, \vec{\Omega}\rangle$$

Dem

La energía cinética

$$\frac{1}{2}m\|v\|^2 = \frac{m}{2}\|V\|^2 = \frac{m}{2}\langle \vec{\Omega} \times Q, \vec{\Omega} \times Q\rangle = \frac{1}{2}\langle A\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle \vec{M}, \vec{\Omega}\rangle \quad //$$

Al operador simétrico A, le llamamos el operador ó tensor de inercia de un punto Q.

Teorema

El momento angular $\vec{M}$ de un cuerpo rígido con un punto fijo O depende linealmente de la velocidad angular $\vec{\Omega}$, i.e. existe un operador lineal $A: K \to K$, $A\vec{\Omega} = \vec{M}$. A es simétrico y la energía cinética del cuerpo está dada por la forma cuadrática

$$K = \frac{1}{2}\langle A\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle.$$

Dem

Por definición, el momento angular de un cuerpo es igual a la suma de los momentos angulares de sus puntos

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i A_i \vec{\Omega} = A\vec{\Omega}$$

donde $A = \sum_i A_i$

Como por el lema, el operador de inercia A_i de cada punto es simétrico, el operador A también es simétrico.

Para la energía cinética,

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}\langle \vec{M}_i, \vec{\Omega}\rangle = \frac{1}{2}\langle \vec{M}, \vec{\Omega}\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle A\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle \quad //$$

Notar que $K > 0$ si $\vec{\Omega} \neq 0$

A es positivo definido.

Ejes principales de inercia

Todo operador simétrico tiene 3 direcciones características que son mutuamente ortogonales.

Sean $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in K$ vectores unitaros correspondientes a las 3 direcciones caraterístias y I_1, I_2, I_3 son los valores propios.

En $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, la energía cinética se escribe,

$$K = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2)$$

Los ejes $\vec{e}_i$ se llaman ejes principales de inercia del cuerpo en el punto O.

Si los número I_1, I_2, I_3 no son todos distintos, entonces los ejes $\vec{e}_i$ no están definidos de manera única.

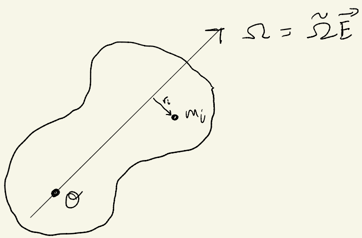
Clarificamos el significado de I_1, I_2 e I_3 con el siguiente teorema.

Teorema

Consideramos la rotación del cuerpo rígido fijo en el punto fijo O con velocidad angular $\vec{\Omega} = \tilde{\Omega}\vec{E}$ ($\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}$, $\vec{E}$ es un vector unitario en K), la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2} I_E \tilde{\Omega} \qquad \text{donde } I_E = \sum_i m_i r_i^2$$

y r_i es la distancia de la masa puntual m_i al eje determinado por $\vec{E}$.



Dem

Por la definición de energía cinética

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2}\|v_i\|^2, \quad \text{sabemos}$$

$$\|v_i\| = \tilde{\Omega} r_i \Rightarrow K = \left(\sum_i \frac{m_i}{2} r_i^2\right)\tilde{\Omega}^2$$

$$= \frac{1}{2} I_E \tilde{\Omega}^2$$

Al número I_E se le llama momento de inercia del cuerpo con respecto al eje $\vec{E}$.

Los números I_1, I_2, I_3 son los momentos de inercia con respecto a los ejes principales de inercia.

Pasamos al caso continuo

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2}\|v_i\|^2 = \sum \frac{m_i}{2}\|V_i\|^2$$

$$K = \frac{1}{2}\int_{\text{cuerpo}} \rho(Q)\,\|V(Q)\|^2\, d^3Q = \frac{1}{2}\int_{\text{cuerpo}} \rho(Q)\,\|\vec{\Omega}\times Q\|^2\, d^3Q$$

$$= \frac{1}{2}\langle A\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\rangle$$

donde A es el operador simétrico positivo definido asociado al producto interno definido por $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \int_{\text{cuerpo}} \rho(Q)\,(X \times Q)\cdot(Y \times Q)\, d^3Q$$

Usando que $(\underline{X}\times Q)\cdot(\underline{Y}\times Q) = (\underline{X}\cdot\underline{Y})\|Q\|^2 - (\underline{X}\cdot Q)(\underline{Y}\cdot Q)$ obtenemos que las entradas de la matriz que representa al operador A respecto a la base fija $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ en el cuerpo son

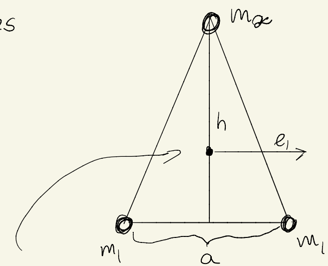
$$A_{ij} = \langle\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle\rangle = \begin{cases} -\int_{cuerpo} \rho(Q)\, Q_i Q_j \, d^3Q & \text{si } i\neq j \\ \int_{cuerpo} \rho(Q)\,(\|Q\|^2 - Q_i^2)\, d^3Q & \text{si } i=j. \end{cases}$$

Se tiene que $\vec{M} = A\vec{\Omega}$

$$I_E = \int_{cuerpo} \rho(Q)\, \underbrace{r(Q)}_{\text{distancia de } Q \text{ al eje } \vec{E}}{}^2\, d^3Q$$

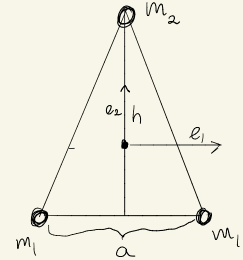
Ejemplo

Triangulo isóceles



El centro de masa

$$\frac{h\, m_2}{2m_1 + m_2} = \frac{m_2 h}{\mu}, \quad \mu - \text{masa total}$$



$$I_1 = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 = 2m_1\left(\frac{m_2 h}{\mu}\right)^2 + m_2\left(h - \frac{m_2 h}{\mu}\right)^2$$

$$= \frac{2m_1 m_2^2 h^2}{\mu^2} + m_2\left(\frac{h(\overbrace{\mu - m_2}^{2m_1})}{\mu}\right)^2$$

$$= \frac{2m_1 m_2^2 h^2}{\mu^2} + m_2 \frac{h^2\, 2m_1}{\mu^2} = \frac{2m_1 m_2 h^2}{\mu}$$

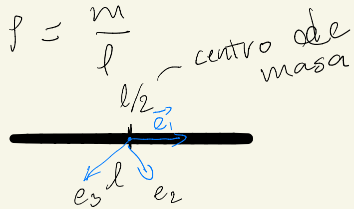
$$I_2 = 2m_1\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{m_1 a^2}{2}$$

$$I_3 = I_1 + I_2$$

Cuerpo homogeneo continuo

Palito de longitud ℓ y masa m

$$\rho = \frac{m}{\ell}$$



$$I_1 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{m}{\ell} x^2\, dx = \frac{m\ell^2}{12}$$