Claramente, la velocidad del movimiento transferido de un punto $q$ en este caso está dado por

$$\dot{q} = \vec{\omega} \times q$$

## Teorema

Para cada instante $t$, existe un vector $\vec{\omega}(t) \in k$ tal que la velocidad de transferencia se expresa por,

$$\dot{q}(t) = \vec{\omega}(t) \times q(t), \quad \forall q \in k \quad (VA)$$

El vector $\vec{\omega}(t)$ se llama velocidad angular instantaneo.

Claramente, este vector está definido de manera única por (VA).

## Cor

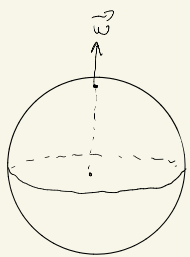
Supongamos que un marco rígido $K$ rota alrededor de un punto estacionario $O$ de $k$. Entonces a cada instante existe un eje instantaneo de rotación (la línea recta del cuerpo que pasasa por $O$ tal que la velocidad de sus puntos en un momento dado es igual a cero). La velocidad de los puntos restantes es perpendicular a una línea recta y es proporional a la distancia hacia ella.

El eje instantaneo de rotacion en $k$ está dado por un vector $\vec{\omega}$ en $K$ el vector corres pondiente se donota por

$$\vec{\Omega} = B_t^{-1} \vec{\omega} \quad (B_t^{-1} : k \to K)$$

↳ velocidad angular en el cuerpo.

Ejemplo




$$|\vec{\omega}| = \frac{2\pi}{3600} \cdot 24 \, seg^{-1} \approx 7.3 \times 10^{-5} \, seg^{-1}$$

## Dem del teorema.

$$\dot{q} = \dot{B}_t Q + \cancelto{0}{B_t \dot{Q}} + \dot{r}$$

$\dot{Q} = 0$

$r = 0 \Rightarrow \dot{r} = 0$

$q(t) = B_t Q(t)$

$\Rightarrow Q(t) = B_t^{-1} q(t)$

$$\dot{q} = \dot{B}_t Q = \dot{B}_t B_t^{-1} q(t)$$

$$\dot{q}(t) = A(t)\, q(t) \qquad A(t) = \dot{B}_t B_t^{-1} : k \longrightarrow k$$

es un operador lineal en $k$.

## Dos lemas

### Lema 1

$A$ es un operador antisimétrico

$$A^T + A = 0$$

**Dem**

$$A = \dot{B}_t B_t^{-1}, \qquad A^T = (B_t^{-1})^T \dot{B}_t^T = B_t \dot{B}_t^T$$

Sabemos que $B_t^T = B_t^{-1}$

$$B_t B_t^T = E, \qquad \dot{B}_t B_t^T + B_t \dot{B}_t^T = 0$$

$$\Rightarrow \cancelto{A}{\dot{B}_t B_t^{-1}} + B_t \dot{B}_t^T = 0$$

$$A + A^T = 0 \quad //$$

$A$ es antisimétrico

$\vec{\omega} \times q$ es antisimétrico.

### Lema

Todo operador antisimétrico $A$ en un espacio 3 dimensional euclidiano y orientable es un operador de multiplicación vectorial por un vector fijo:

$$Aq = \vec{\omega} \times q, \qquad \forall q \in \mathbb{R}^3.$$

**Dem**

Los operadores antisimétricos de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ forman un espacio lineal.

Las representaciones matriciales de $A^T + A = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{espacio de dimensión } 3.$$

El operador $\vec{\omega} \times q$, es lineal y antisimétrico.

$\rightarrow$ También son un subespacio lineal

↳ los operadores se caracterizan por

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times (q)$$

Los operadores $Aq = \vec{\omega} \times q$ //

$$\dot{q} = \dot{B}_t B_t^{-1} q(t) = A(t)\, q(t) = \vec{\omega}(t) \times q(t) \quad //$$

Escribimos la matriz asociada a $A$

tomamos $e_1, e_2, e_3$ , $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$Ae_1 = \vec{w} \times e_1 \qquad j = 1,2,3$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w_3 \\ -w_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} \times e_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -w_3 \\ 0 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

$$Aq = \vec{w} \times q = \hat{w} \cdot q$$

## Velocidad transferida

Supongamos que el sistema $K$ rota ($r = 0$) y que un punto en $K$ se mueve ($\dot{Q}(t) \neq 0$)

$$Q = Q(t), \quad r(t) = 0$$

$$q(t) = B_t Q(t) \Rightarrow Q(t) = B_t^{-1} q(t)$$

$$\dot{q}(t) = \dot{B}_t Q(t) + B_t \dot{Q}(t)$$

$$= \dot{B}_t B_t^{-1} q(t) + B_t \dot{Q}(t)$$

$$= \vec{w}(t) \times q(t) + B_t \dot{Q}(t)$$

$$\dot{q}(t) = v_n + v'$$

velocidad absoluta — transferida de rotacion — relativa.

Hemos demostrado que

Teorema

Si un sistema en movimiento $K$ rota relativo a $O \in k$, entonces la velocidad absoluta es igual a la suma de la velocidad relativa y la velocidad transferida

$$v = v' + v_n$$

donde

$$v = \dot{q} \in K$$

$$v' = B_t \dot{Q}(t)$$

$$v_n = \dot{B}_t Q(t) = \vec{w}(t) \times q(t)$$