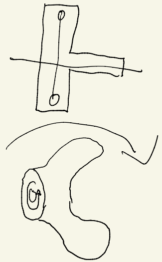
Cuerpo rígido

La mayoría de los sistemas con un número finito de grados de libertad en $\mathbb{R}^3$ son cuerpos rígidos.



Dzhaniebekov

Movimiento en un sistema de coordenadas

Sea un sistema Lagrangiano $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ en las coordenadas q,t. y un sistema de coordenadas en movimiento $Q = Q(q,t)$

Teorema

Si la trayectoria $\gamma : q = \varphi(t)$ de las ecuaciones de E-L $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$ se escribe como $\gamma: Q = \Phi(t)$ en coordenadas locales, Q, t entonces la función $\Phi(t)$ satisface.

E-L $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q} = 0$ con $\mathcal{L}'(Q,\dot{Q},t) = \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$

Consideremos el caso cuando q es el vector de radio cartesiano de un punto relativo a un sistema coordenado inercial k (estacionario) y Q es el vector de radio cartesiano del mismo punto relativo al sistema coordenado en movimiento K.

Def

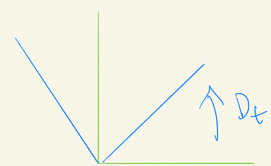
Sean k y K espacios euclidianos orientables. Un movimiento de K relativo a k es un mapeo suave que depende del tiempo t

$$D_t : K \to k$$

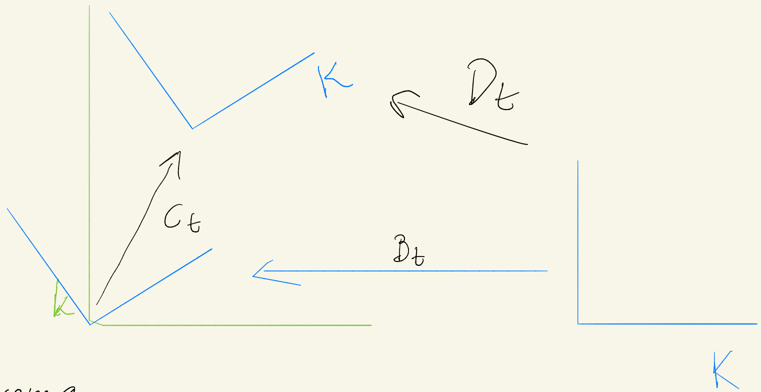
que preserva la métrica y la orientación.

Def

Un movimiento D_t se llama rotación si lleva el origen de K en el origen de k. (D_t es un operador lineal)



El primer teorema será que todos los movimientos se componen de una rotación y una translación



Teorema

Todo movimiento D_t se puede escribir de forma única como la composición de una rotación $B_t: K \to k$ y una translación $C_t: k \to k$,

$$D_t = C_t B_t$$

donde $C_t q = q + r(t)$, $(q, r \in k)$.

Dem

Tomamos $r(t) = D_t \bar{o}$, $B_t = C_t^{-1} D_t$

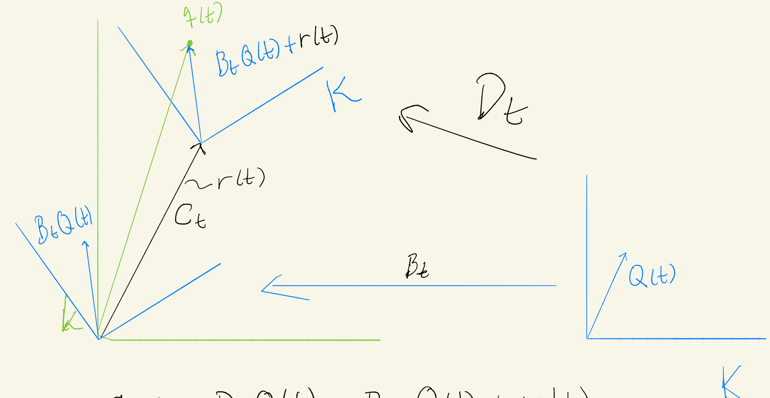
Nota $C_t^{-1} q = q - r(t)$ $\left(C_t q = q + r(t) \right)$

Entonces $B_t \bar{O} = \bar{o}$. //

Def

Un movimiento D_t se llama <u>translacional</u> si el mapeo $B_t: K \to k$ correspondiente no depende del t.

$$B_t = B_0 = B, \quad D_t Q = BQ + r(t)$$



$$q(t) = D_t Q(t) = B_t Q(t) + r(t)$$

$q(t) \in k$ No confundir $q(t)$ con $Q(t)$.

$Q(t) \in K$ Los dos viven en espacios distintos.

Suma de velocidades

Expresamos la "velocidad absoluta" $\dot{q}$ en términos del movimiento relativo $Q(t)$ y el movimiento del sistema de coordenadas, D_t.

Derivamos $q(t) = D_t Q(t) = B_t Q(t) + r(t)$ c.r.t.

$$\dot{q}(t) = \dot{B}_t Q(t) + B_t \dot{Q}(t) + \dot{r}(t)$$

Por casos movimiento translacional ($\dot{B}_{\cancel{t}} = 0$)

$$\dot{q}(t) = B\dot{Q}(t) + \dot{r}(t)$$

Teorema

Si el movimiento de K es translacional relativo a k, entonces la velocidad absoluta es igual a la velocidad relativa ($B\dot{Q}(t)$) y la velocidad de movimiento del sistema ($\dot{r}(t)$), K.

$$v = v' + v_0$$
$$= B\dot{Q}(t) + \dot{r}(t)$$

$v = \dot{q} \in k$

$v' \in k$

$v_0 \in k$

$\dot{Q}(t) \in K$

Velocidad angular

En el caso de un movimiento de rotación de K la relación entre las velocidades absoluta y relativa no es tan simple.

Consideramos el caso en el que $\dot{Q} = 0$, cuando el punto está en reposo dentro de K.

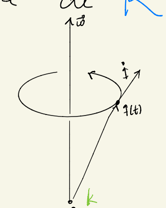
Este movimiento de $q(t)$ se llama rotación transferida.

Ejemplo

Rotación con velocidad angular fija

Sea $U(t): k \to k$ una rotación del espacio k alrededor del eje $\vec{\omega} \in k$ a través de un ángulo $|\vec{\omega}|t$.

Entonces $B(t) = U(t)B(0)$ se llama rotación uniforme de K con velocidad angular $\vec{\omega}$.



velocidad angular.

$\dot{q} = \vec{\omega} \times q$

Claramente, la velocidad del movimiento transferido de un punto q en este caso está dado por

$$\dot{q} = \vec{w} \times q$$

Teorema

Para cada instante t, existe un vector $\vec{w}(t) \in k$ tal que la velocidad de transferencia se expresa por,

$$\dot{q}(t) = \vec{w}(t) \times q(t), \quad \forall q \in k \quad \text{(MA)}$$

El vector $\vec{w}(t)$ se llama momento angular instantaneo.

Claramente, este vector está definido de manera única por (MA).

Cor

Supongamos que un marco rígido K rota alrededor de un punto estacionario O de k. Entonces a cada instante existe un eje instantaneo de rotación (la línea recta del cuerpo que pasasa por O tal que la velocidad de sus puntos en un momento dado es igual a cero). La velocidad de los puntos restantes es perpendicular a una línea recta y es proporional a la distancia hacia ella.