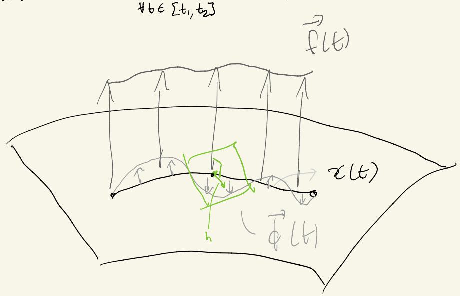
Lema

Sea $\vec{f} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ campo vectorial continuo.
Si para todo campo vectorial $\vec{\phi}$ tangente a M a lo largo de una curva x, i.e. $\vec{\phi}(t) \in T_{x(t)}M$ con $\phi(t_1)=0$, $\phi(t_2)=0$ tenemos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \vec{f}(t), \vec{\phi}(t) \rangle \, dt = 0$$

entonces el campo $\vec{f}(t)$ es perpendicular a M en todo punto de la curva $x(t)$.

$$\left(\langle \vec{f}(t), h \rangle = 0 \quad \forall \underset{\forall t \in [t_1,t_2]}{h \in T_{x(t)}M} \right)$$



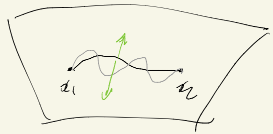
Dem (del Teorema)

"mínima acción" $q(t) \in M_t \ \forall t$ es el extremo de la acción, $q(t_1)=x_1$, $q(t_2)=x_2$

$$\mathcal{A}_L \text{ en } \mathfrak{X}_c$$

$$\mathfrak{X}_c = \{ \text{curvas } x \in C^\infty \text{ de } [t_1,t_2] \text{ a } M_t \text{ tales que } x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=x_2 \}$$

$$= \{ q(t) + \beta\phi(t),\ t \in [t_1,t_2] \to M_t,\ \beta \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ \phi(t_1) = 0 = \phi(t_2) \}$$



$$\frac{d}{d\beta} \mathcal{A}_L(q+\beta\phi)\Big|_{\beta=0} =$$

$$\cdots = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \phi_i \, dt = 0$$

$$\iff \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \phi_i \right\rangle dt = 0$$

Por el lema

$$\left\langle \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \phi \right\rangle = 0$$

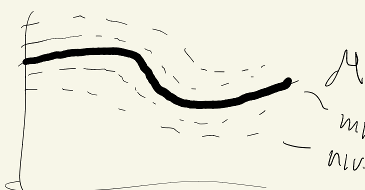
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \text{es ortogonal}$$

para todos los vectores $h \in T_{q(t)} M_t$.

También existe la teoría de potenciales artificiales para aproximar la restricción a un contorno.

Ej $x \in \mathbb{R}^2$, $\quad m\ddot{x} = F$, $\quad$ contorno $f(x) = 0$

$\rightsquigarrow$ curva M en $\mathbb{R}^2$



Diseñamos un potencial $V(x)$ tal que
mínimo en curva
niveles que aumentan normal a la curva.

El nuevo problema

$$m\ddot{x} = F - \frac{1}{\varepsilon}\nabla V(x), \quad \varepsilon >> 1$$