Formulación Lagrangiana I

$x \in \mathbb{R}^n$, Lagrangiana $\mathcal{L}: \underset{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}{T\mathbb{R}^n} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

s contornos $f_j(x,t) = 0$, $j = 1, \dots, s$

$$\tilde{\mathcal{L}}(x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j f_j(x,t)$$

¿Cómo se ven las ecs. E-L?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

En mec. $\rightarrow$ hemos añadido fuerzas $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j \nabla f_j$

En sistemas Lagrangianos, añadir términos $\sum_j \lambda_j f_j$ al Lagrangiano es equivalente a la teoría de contornos ideales.

Jueves 10 diciembre 2020. Examen "en clase"!

Martes / Jueves 15 y 17 diciembre

Grabaré clases a la hora de clase

Martes / Jueves 5 y 7 enero.

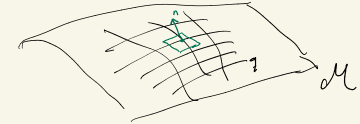
ó ver grabación ó trabajo independiente

Formulación alternativa

$$\{ f_j(x) = 0, \; j = 1, \dots, s \} = \mathcal{M}$$

Variedad en $\mathbb{R}^n$ (dim $n - s$)

$\mathbb{R}^n$



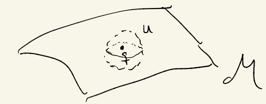
dim $\mathcal{M} = n - s$

q – coordenadas en $\mathcal{M}$ dim $n - s$

Sean n – coordenadas del espacio normal, de dimensión s

Tenemos (q, n) coordenadas de $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^n = T_x\mathbb{R}^n$

$$U = \{ (q,n) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^s : n = c \}$$



$x = x(q,n)$ en U de $\mathbb{R}^n$

$x_i = x_i(q,c)$ en U, $i = 1, \dots, n$

Lagrangiano $\mathcal{L}: T\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(x(q,n), \dot{x}(q,n), t)$$

Espacio tangente

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{m=n-s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{s=n-m} \frac{\partial x_i}{\partial n_k} \dot{n}_k$$

funciones de q, n

Por ejemplo

$(x_1, \dots, x_m) = (q_1, \dots, q_m)$

$(x_{m+1}, \dots, x_n) = (n_1, \dots, n_{n-m})$

Lagrangiano en M

Cuando las normales son constantes.

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{m=n-s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \cancel{\sum_{k=1}^{s=n-m} \frac{\partial x_i}{\partial n_k}\dot{n}_k} \to 0$$

$$x = x(q,c)$$

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{m=n-s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

Sea $L_c(q,\dot{q},t) = L(x(q,c), [D_q x(q,c)]\dot{q}, t)$

$$[D_q x(q,c)]_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}(q,c) \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m \end{matrix}$$

matriz

$(n\times m)(m\times 1) = (n\times 1)$

$[\quad]\cdot\dot{q} = \dot{x}$

Ecuación de E-L

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_c}{\partial q_i} = 0 \xrightarrow{\text{evolución}} (q(t), \dot{q}(t)) \in TM \quad \forall t.$$

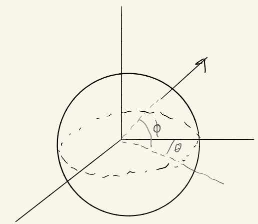
Notas

- Esto conviene cuando $n=c$.
- ¿Cuál es la relación entre el principio de d'Alembert y E-L con L restringida?
- No aparecen fuerzas de contorno.

Ejemplo

$x \in \mathbb{R}^3$, $L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 - mgx_3$

Contorno M: $|x|^2 - 1 = 0$
$f(x) = 0$
(partícula sobre la esfera con fuerza externa $(0,0,-mg)$)



$$x = (x_1, x_2, x_3) = (r\cos\phi\cos\theta, r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi)$$

en M: $r=1$

$\to (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi)$

$$\dot{x} = (-\dot{\phi}\sin\phi\cos\theta - \dot{\theta}\cos\phi\sin\theta, -\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\phi\cos\theta, \dot{\phi}\cos\phi)$$

$$L_c(\phi,\theta,\dot{\phi},\dot{\theta}) = L(x(\phi,\theta), \dot{x}(\phi,\theta,\dot{\phi},\dot{\theta}))$$

$$= \frac{1}{2}m\left[(\dot{\phi}\sin\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\sin\theta)^2 + (\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta - \dot{\theta}\cos\phi\cos\theta)^2 + \dot{\phi}^2\cos^2\phi\right]$$

$$- mg\sin\phi$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\begin{matrix} \dot{\phi}^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \cancel{2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\phi\sin\theta\cos\phi\cos\theta} + \dot{\theta}^2\cos^2\phi\sin^2\theta \\ + \dot{\phi}^2\sin^2\phi\sin^2\theta - \cancel{2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\phi\sin\theta\cos\phi\cos\theta} + \dot{\theta}^2\cos^2\phi\cos^2\theta \\ + \dot{\phi}^2\cos^2\phi \end{matrix}\right] \to 0$$

$$- mg\sin\phi = \frac{1}{2}m\left[\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2\cos^2\phi\right] - mg\sin\phi$$

E-L

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_c}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_c}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

(ec. del péndulo esférico)