Generalización de (II)

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, s < n$

Restricciones $f_i(x(t)) = 0$, $i = 1, \dots, s$

La dinámica se mueve en una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - s$

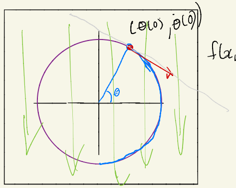
Comentarios

- Las restricciones son sobre el espacio de configuraciones.
- Existen restricciones sobre el espacio de velocidades (son restricciones no-holonómicas)
- Podríamos permitir que $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $f_i(x, t) = 0$

Un ejemplo es $x \in \mathbb{R}^2$ $x = (x_1, x_2)$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$



$\dot\theta(0) \in T_{\theta(0)} M$

Caso $m\ddot{x} = F$ en $\mathbb{R}^n$

Def

$$M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \}$$

Supondremos que la variedad está fija en $\mathbb{R}^n$.

En general (I), (II) son incompatibles.

Podría ser

$x(0) \notin M$

$x(0) \in M$, $\dot{x}(0) \in T_{x(0)} M$

Podemos pensar que se necesita otra fuerza para que la partícula permanezca en M.

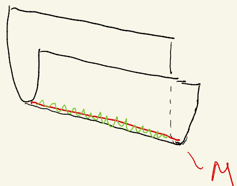
(I), (II) $\to$ $m\ddot{x} = F + \tilde{F}$, $f(x) = 0$

$\tilde{F}$ es una fuerza por determinar

Buscar una $\tilde{F}(x, \dot{x}, t)$ para que la soln de $m\ddot{x} = F + \tilde{F}$, $x(0) \in M$ y $\forall t \in \mathbb{R}$ $(x(t), \dot{x}(t)) \in TM$

Intuición: podríamos poner una fuerza de fricción

$$\tilde{F} \sim -\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

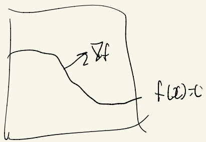


Para esto tendríamos que imponer que $\tilde{F}$ iría en la dirección de $-\nabla f$ (normal al contorno).

Otra opción

Una fuerza de contorno "ideal"

$\tilde{F} = \lambda \nabla f$, $\lambda \in \mathbb{R}$



Ahora el problema es

Resolver $\{ (\mathrm{I})\ m\ddot{x} = F + \lambda \nabla f,\ (\mathrm{II})\ f(x) = 0 \}$

... con $x(0) \in M$, $\dot{x}(0) \in T_{x(0)} M$ (cond. inicial).

Hay que encontrar λ tal que $x(t)$ satisface (I) y (II)

1) Sea V un campo vectorial en M tal que $\langle \nabla f, V \rangle = 0$

Tomamos producto $\langle \cdot, V \rangle$ de

$$m\ddot{x} - F - \lambda \nabla f = 0$$

$$\langle m\ddot{x} - F - \lambda \nabla f, V \rangle = \langle m\ddot{x} - F, V \rangle - \lambda \cancel{\langle \nabla f, V \rangle}^{=0}$$

$$= 0$$

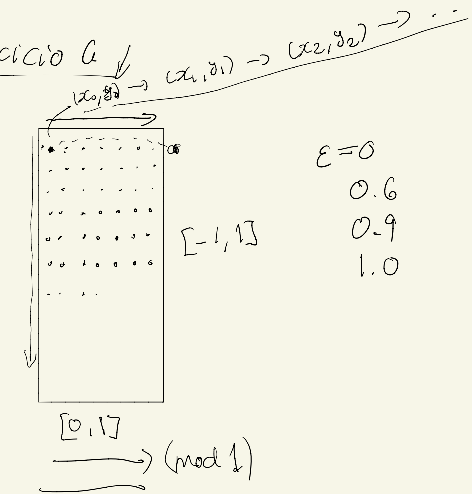
$\langle m\ddot{x} - F, V \rangle = 0$, en $\mathbb{R}^n$ la $\dim M = n-1$

Para tener la dinámica en una curva 1 dimensional debemos encontrar $n-1$ campos vectoriales V_j, $j = 1, \dots, n-1$, que sean linealmente independientes en cada punto de la variedad M.

(I) implica que $\langle m\ddot{x} - F, V_j \rangle = 0$, para $j = 1, \dots, n-1$

esta es la ecuación de d'Alembert (principio de d'Alembert-Lagrange)

Ejercicio 6



$\varepsilon = 0$
0.6
0.9
1.0