Energía en sistemas Lagrangianos

Sea $(M, \mathcal{L})$ sistema Lagrangiano

$\dim M = n \qquad \mathcal{L} : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

Definición (Energía)

$$E : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$E(q, v, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} v_i - \mathcal{L}(q, v, t)$$

Ejemplo

$M = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m |v|^2 - U(q) = K - U$

$$E = \sum_{i=1}^{n} (m v_i) v_i - (K - U)$$

$$= \underbrace{m |v|^2}_{2K} - K + U = K + U$$

(Coincide con la definición de energía total)

En particular

Si $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R}$

Sea $q(t)$ trayectoria

$$\frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

Proposición

Sea $(M, \mathcal{L})$ sist Lagrangiano y $E(q, v, t)$ definida antes.

Si $q(t)$ es solución de E-L, entonces

$$\frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t), t) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(q(t), \dot{q}(t), t)$$

Cor

E es una integral del sistema si $\mathcal{L}$ no depende del tiempo.

Dem

$$\frac{d}{dt} E(q, v, t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\cancel{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}} \right) v_i + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \frac{d v_i}{dt}} \right]$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \frac{d v_i}{dt}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Variables cíclicas

Sea $(M, \mathcal{L})$ sistema lagrangiano

$\dim M = n \quad q = (q_1, \dots, q_n)$ coordenadas.

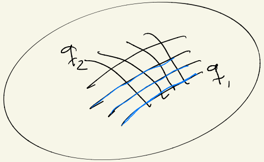
$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

– El lagrangiano no depende de q_1

La coordenada q_1 se conoce como coordenada cíclica del sistema.

Obs Hay una simetría.



$$Q_\varepsilon(q) = (q_1 + \varepsilon, q_2, \dots, q_n)$$

Claramente $\mathcal{L}$ tiene una simetría.

$$\frac{d}{d\varepsilon} Q_\varepsilon(q) \Big|_{\varepsilon=0} = (1, 0, \dots, 0)$$

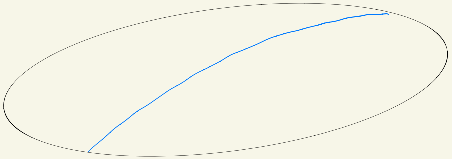
$$J(q, v) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1}$$

Ej $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad \text{momento angular}$$

Teoría de Contornos

Restricciones en el espacio de configuraciones a la dinámica.



Restricciones holonómicas.

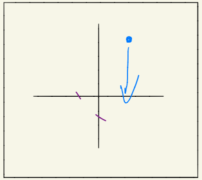
(I) Sistema Newtoniano en $\mathbb{R}^n$

$m\ddot{x} = F$, fuerza $F(x, \dot{x}, t)$ dada.

por ejemplo, una partícula en un campo gravitacional constante $x \in \mathbb{R}^2$.

$F = (0, -mg)$

$m\ddot{x} = (0, -mg)$



(II) Contorno

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x(t)$ satisface que $f(x(t)) = 0 \quad \forall t$

La dinámica se mueve en una subvariedad de dim $n-1$.