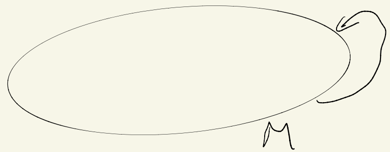
Teorema de Noether

Simetría del Lagrangiano $\Longleftrightarrow$ cantidad conservada.

Familia uniparamétrica de difeomorfismos de M

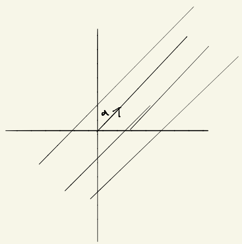
$$Q : M \times \overset{\varepsilon}{\mathbb{R}} \longrightarrow M$$

$$(q, \varepsilon) \longmapsto Q_\varepsilon(q)$$



Ejemplito

$q \in M = \mathbb{R}^n, \quad Q_\varepsilon(q) = q + \varepsilon a, \quad a \in \mathbb{R}^n$



translaciones

Por cierto

$Q^{-1}_\varepsilon(q) = q - \varepsilon a$

$D_q Q_\varepsilon(q) = \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$[D_q Q_\varepsilon(q)]\dot{q} = \dot{q}$

Ejemplito 2

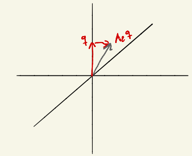
$q \in M = \mathbb{R}^2, \quad Q_\varepsilon(q) = A_\varepsilon q$

rotobación por un ángulo ε, $A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix}$

E3

$q = M = \mathbb{R}^3, \quad Q_\varepsilon(q) = A_\varepsilon q$

A_ε familia de matrices ortogonales, $\det A_\varepsilon = 1$



Norma euclidiana

$|A_\varepsilon q| = |q|$

Preservan la norma

Nota

$A_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathbb{B})$

$\mathbb{B}$ matriz antisimétrica.

$\exp(\mathbb{B}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbb{B}^k$, converge uniformemente

$$\begin{aligned} A_\varepsilon A_\varepsilon^T &= \exp(\varepsilon\mathbb{B})\exp(\varepsilon\mathbb{B}^T) \\ &= \exp(\varepsilon\mathbb{B})\exp(-\varepsilon\mathbb{B}) \\ &= \exp(\varepsilon(\mathbb{B}-\mathbb{B})) = \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

Cada difeomorfismo de M induce un difeomorfismo sobre TM

$Q_\varepsilon : M \longrightarrow M \qquad \overset{\in M}{q} \longmapsto Q_\varepsilon(q) \in M$

$\tilde{Q}_\varepsilon : TM \longrightarrow TM \qquad (q, v) \longmapsto (Q_\varepsilon(q), \underbrace{[D_q Q_\varepsilon(q)] v}_{T_q M})$

Regla de la cadena

$v = \dot{q}$

$\dot{q} = \frac{d}{dt} q \longmapsto \frac{d}{dt} Q_\varepsilon(q) = [D_q Q_\varepsilon(q)] \frac{dq}{dt} \quad \dot{q} = v$

$\tilde{Q} : TM \times \mathbb{R} \longrightarrow TM$

$(q, v, \varepsilon) \longmapsto (Q_\varepsilon(q), [D_q Q_\varepsilon(q)] v)$

induce una transformación del Lagrangiano

$\mathcal{L} : TM \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

La transformación

$\mathcal{L}(q, v, t) \overset{\tilde{Q}_\varepsilon}{\longmapsto} \mathcal{L}(Q_\varepsilon(q), [D_q Q_\varepsilon(q)] v, t) \overset{def}{=} \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(q, v, t)$

Ejemplo

$\mathcal{L}(q,v) = \frac{1}{2}v^2 - \sin q$, $M = S^1$, $TS^1 = S \times \mathbb{R}$ = cilindro.

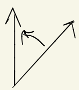
$Q_\varepsilon(q) = q + \varepsilon$, $v = [D_q Q_\varepsilon(q)]v = 1 \cdot v = v$

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(q,v) = \mathcal{L}(Q_\varepsilon(q), [D_q Q_\varepsilon(q)]v) = \mathcal{L}(q+\varepsilon, v)$$
$$= \frac{1}{2}v^2 - \sin(q+\varepsilon)$$

Ejemplo 2

$q \in M = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}(q,v) = \frac{1}{2}|v|^2 - U(|q|)$

$Q_\varepsilon(q) = A_\varepsilon q$, $A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix}$



$A_\varepsilon \cdot (\,)$ preserva la norma en $\mathbb{R}^2$.

$$v \mapsto [D_q Q_\varepsilon(q)]v = A_\varepsilon v$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(q,v) = \frac{1}{2}|A_\varepsilon v|^2 - U(|A_\varepsilon q|)$$
$$= \frac{1}{2}|v|^2 - U(|q|)$$
$$= \mathcal{L}(q,v)$$
($\mathcal{L}$ es invariante bajo $\tilde{Q}_\varepsilon$)

Def

Dada $Q_\varepsilon : M \to M$, $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R}$,

$\mathcal{L}$ invariante bajo $Q_\varepsilon \overset{def}{\iff} \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(q,v) = \mathcal{L}(q,v)$ $\forall (q,v) \in TM$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(q,v) = \mathcal{L}(Q_\varepsilon(q), [DQ_\varepsilon(q)]v)$$

Teorema (Noether)

Sea $(M, \mathcal{L})$ sist. Lagrangiano, autónomo, $Q_\varepsilon : M \to M$ familia uniparamétrica C^∞ de difeomorfismos de M. Si $\mathcal{L}$ es invariante bajo Q_ε entonces existe una $J : TM \to \mathbb{R}$ para la cual si $q : (t_1, t_2) \to M$ es soln del sistema, entonces $\frac{d}{dt} J(q(t), \dot{q}(t)) = 0$, $t \in (t_1, t_2)$

* La función J está dada por

$$J(q,v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}(q,v) \cdot \frac{d}{d\varepsilon}(Q_\varepsilon(q))_i \Big|_{\varepsilon=0}$$

(i.e. $Q_\varepsilon(q) = [(Q_\varepsilon(q))_1, \dots, (Q_\varepsilon(q))_n]$

Ejemplo

$$J(q,v) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1} \cdot \frac{d}{d\varepsilon}(Q_\varepsilon(q))_1 \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_2} \cdot \frac{d}{d\varepsilon}(Q_\varepsilon(q))_2 \Big|_{\varepsilon=0}$$

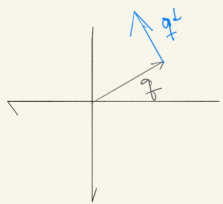
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{1}{2}\left(v_1^2+v_2^2\right) + U(|q|)\right)$$

$$= v_i \quad , i=1,2$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}(A_\varepsilon q) = A_\varepsilon' q = \begin{bmatrix} -\sin\varepsilon & -\cos\varepsilon \\ \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon = 0$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix}$$



$$J(q,v) = v_1(-q_2) + v_2 q_1 = q_1 \times v$$

$=$ ¡momento angular!

Ejemplo 2

s partículas en $\mathbb{R}^2$ $\quad q_i \in \mathbb{R}^2, \ i=1,\dots,s$

$$M = \mathbb{R}^{2s}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} m_i |\dot{q}_i|^2 - U(q_1,\dots,q_s)$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1,\dots,s \\ i<j}} U_{ij}(|q_i - q_j|), \quad U_{ij} = U_{ji}$$

Familia

$$g_\varepsilon^j(q_1,\dots,q_s) = (q_1 + \varepsilon\hat{e}_j, \dots, q_s + \varepsilon\hat{e}_j)$$

$j = 1,2$

$$J = \sum_{i=1}^{s} m_i v_i \cdot \hat{e}_j$$

j-ésima componente del momento total.

$$J(q,v) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_i \begin{pmatrix} v_i^x \\ v_i^y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad j=1 \\ + \quad j=2 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_i \begin{pmatrix} v_i^x \\ v_i^y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_i v_i^x \\ + \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_i v_i^y \end{pmatrix}$$

Familia $\quad h_\varepsilon(A_\varepsilon q_1, \dots, A_\varepsilon q_s)$

J momento angular total.