Ejemplo
Partícula en campo electromagnético.
masa m, carga eléctrica e, $q \in \mathbb{R}^3$.

Ecuaciones de Newton

E: campo eléctrico, depende de q, t
B: campo magnético, depende de q, t
$c =$ velocidad de la luz.

$$m\ddot{q} = eE(q,t) + \underbrace{\frac{e}{c}\,\dot{q} \times B(q,t)}_{\text{Fuerza de Lorenz.}}$$

Tarea

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m|\dot{q}|^2 - e\phi(q,t) - \frac{e}{c}\langle \dot{q}, A(q,t)\rangle$$

$\phi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ potencial eléctrico
$A: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ potencial vectorial.

Ec. Maxwell

$$E = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A$$

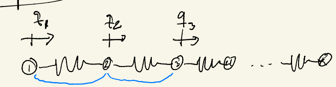
Sistemas de partículas

masas m_i, $q_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i |\dot{q}_i|^2 - U(q_1, \dots, q_k)$$

e.g. $U = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} u_{ij}(|q_i - q_j|)$

Ejemplo 4 Sistema de resortes (sólidos)



k resortes
masas m

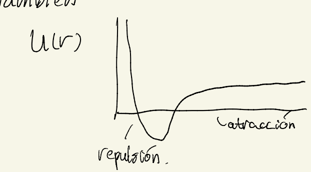
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m\,\dot{q}_i^2 - \sum_{i=1}^{k-1} U(|q_i - q_{i+1}|)$$

U depende de la distancia entre vecinos más cercanos.

$U(r) = \frac{1}{2}hr^2$, $h>0$, interacción de Hooke.

$U(r) = \frac{1}{2}k_2r^2 + \frac{k_4}{4}r^4$, Cadena FPU.

También



Coordenadas generalizadas

Sistema Lagrangiano M espacio de configuraciones

$$\mathcal{L}: TM \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Lagrangiano.

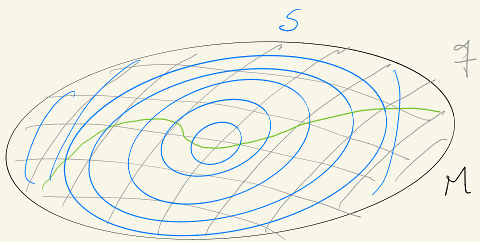
M - coordenadas.

$\mathbb{R}^n$: cartesianas, polares, cilíndricas.

¿Qué pasa con las Ecuaciones de E-L cuando hacemos un cambio de coordenadas?

$(M, \mathcal{L})$ coordenadas q $\mathcal{L}(q, v, t): TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{E-L}: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$



Nuevas coordenadas s : $q = q(s, t)$

$s \xmapsto{f_t} q$ $f_t : M \longrightarrow M$, $t \in I \subset \mathbb{R}$

Es importante que $\exists\, f_t^{-1} \ \forall t \in I$

$\mathcal{L}$ en coordenadas s : $q = q(s,t)$

$\dim M = n$

v (en el espacio tangente)

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial s_j}\dot{s}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n$$

coordenadas de los vectores en el espacio tangente

$$\vec{v} = \underbrace{\left[(Dq)(s,t) \right]}_{\text{matriz Jacobiana de } f_t} \vec{u} + (\partial_t q)(s,t)$$

En la tarea van a demostrar,

Proposición (Los puntos críticos de la acción no dependen de el sist de coords.)

Sean $(M, \mathcal{L})$ sistema Lagrangiano $\dim M = n$,
q, s sistemas de coordenadas en M tales que
$\mathcal{L}(q, v, t)$

$$\tilde{\mathcal{L}}(s, u, t) \stackrel{def}{=} \mathcal{L}(q(s), [Dq(s,t)]u + \partial_t q(s,t), t)$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{s}_i} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s_i} = 0$$

$i = 1, \dots, n$