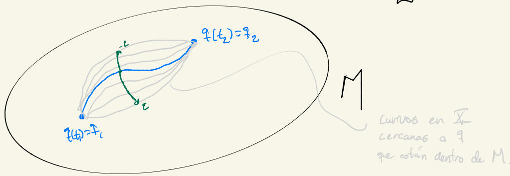
Dem (E-L son la primera variación de $\mathcal{A}_L$)

Sea $\mathbb{X} = C^\infty(t_1, q_1, t_2, q_2; M)$ y sea $q \in \mathbb{X}$ el mínimo de $\mathcal{A}_L$.

Sea q_λ familia parametrizada (uniparamétrica) de curvas en $\mathbb{X}$ tal que $q_0 = q$ ($y\ \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$). Suponemos que q_λ es dif. c.r.a. λ.



$$\mathcal{A}_{\mathcal{L}}(\lambda) = \mathcal{A}_L(q_\lambda) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_\lambda, \dot{q}_\lambda, t)\, dt$$

Nos conviene tomar $q_\lambda = q + \lambda \phi$ si $\lambda = 0 \Rightarrow q_0 = q$

donde $\phi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})\ \{\phi(t_1) = 0,\ \phi(t_2) = 0\}$.

$\quad = \tilde{\mathbb{X}}$ (Nota Fíjense que $\phi \notin \mathbb{X}$)

$$q_\lambda \in (\mathbb{X} + \lambda \tilde{\mathbb{X}}) \subset \mathbb{X} = C^\infty(I; M \mid q_\lambda(t_1) = q_1,\ q_\lambda(t_2) = q_2)$$

Ahora tomamos la derivada con respecto al parámetro λ y evaluamos en $\lambda = 0$.

$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{A}_L(\lambda)\Big|_{\lambda=0}$ esto nos dice como cambia la acción en la dirección de λ cerca de q.

Esto es la primera variación de $\mathcal{A}_L$ en la dirección de λ.

Derivando

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{A}_L(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \lambda\phi, \dot{q} + \lambda\dot{\phi}, t)\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\lambda} \mathcal{L}(q + \lambda\phi, \dot{q} + \lambda\dot{\phi}, t)\, dt$$

(Para derivar necesitamos que $\mathcal{L}$ sea C^1 en $(q, v) \in TM$)

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\lambda)\, \phi_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}(\lambda)\, \dot{\phi}_i \right) dt$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\lambda)}{\partial \square} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \square}(q + \lambda\phi, \dot{q} + \lambda\dot{\phi}, t) \ldots$$

Recordemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \phi_i \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \right) \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \cdot \dot{\phi}_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \cdot \dot{\phi}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \phi_i \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \right) \phi_i$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\lambda)\, \phi_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}(\lambda)}{\partial v_i} \right) \phi_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}(\lambda)}{\partial v_i} \phi_i \right) \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\lambda) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}(\lambda) \right) \right\} \phi_i \right) dt + \cancel{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}(\lambda)}{\partial v_i} \phi_i(t) \right]_{t_1}^{t_2}} \to 0$$

$\phi_i \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_1}^{t_2} \overbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\lambda) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}(\lambda) \right) \right]}^{\Lambda_i(\lambda)} \phi_i\, dt \right)$$

Entonces $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{A}_L(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = 0$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \Lambda_i(0)\, \phi_i\, dt = 0 \qquad (*)$$

$$\Delta_i(0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t)$$

(*) debe satisfacerse para $\phi \in \tilde{\mathbb{X}}$

$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ en la coords de M (dim n).

También se satisface para

$\phi = (\phi_1, 0, 0, \dots, 0)$, $\phi_1 \in C_0^\infty([t_1,t_2], \mathbb{R})$

$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \Delta_1(0)\, \phi_1\, dt = 0$

$\vdots$ lo mismo para

$\phi = (0, \dots, 0, \phi_i, 0, \dots, 0)$, $\phi_i \in C_0^\infty([t_1,t_2], \mathbb{R})$

$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \Delta_i(0)\, \phi_i\, dt = 0.$

Por el lema. $\int_{t_1}^{t_2} \Delta_i(0)\, \phi_i\, dt = 0$

$\Rightarrow$ todas las $\Delta_i(0) = 0$, $\forall\, t \in [t_1, t_2]$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (E\text{-}L).$$

Hemos demostrado que

$q \in \mathbb{X}$ es un mínimo de $\mathcal{A}_L$ en $\mathbb{X}$ entonces q satisface $(E\text{-}L)$ para $\mathcal{L}$ suficientemente suave ($\mathcal{L}$ es C^1 en TM)

Con el mismo argumento

$q \in \mathbb{X}$ es un punto crítico de $\mathcal{A}_L$ en $\mathbb{X}$ entonces q satisface las ecs. $(E\text{-}L)$

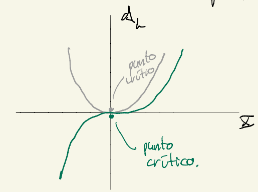
Punto crítico

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\mathcal{A}_L(q_\lambda)\right|_{\lambda=0} = 0$$

es tal que $\forall$ familia uniparamétrica y $q_0 = q$.

Observación

Esta condición nos garantiza que tenemos un punto estacionario.



Modelación Lagrangiana

Lo anterior nos dice que los puntos críticos de la accion $\mathcal{A}_L(q)$ satisfacen (E-L)

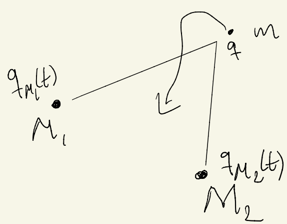
Una ventaja es que recuperamos la mecánica Newtoniana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m |\dot{q}| - U(q,t)$$

$$\text{E-L} \iff m\ddot{q} = -\nabla U(q,t) \quad \text{Newton.}$$

Una partícula en un campo gravitacional.

Problema de 2 cuerpos.



satélite de masa despreciable c.r.a. M_1, M_2

$$U(q,t) = -\frac{GmM_1}{|q_{M_1}(t) - q|} - \frac{GmM_2}{|q_{M_2}(t) - q|}$$

$q_{M_1}(t)$ y $q_{M_2}(t)$ están dadas por las ecuaciones de Kepler.

Las ecuaciones de movimiento Newton ó Lagrange describen el movimiento del satélite m.

- Euler. (Problema restringido de tres cuerpos).
- Si la dinámica de M_1 y M_2 es circular $\Rightarrow$ circular
- Si la dinámica es elíptica $\Rightarrow$ elíptico.

Si suponemos que