Dinámica

Antes escogimos curvas que satisfacen E-L

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(q,\dot{q},t)\right)+\frac{\partial L}{\partial q_i}(q,\dot{q},t)=0$$

¿Porqué estas ecuaciones?

Principio de "mínima acción"!

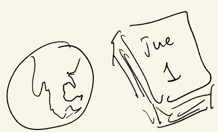
(Principio de Hamilton, Principio de acción estacionaria).

La naturaleza optimiza

Last Thursday-ism.

"El universo se creó el jueves pasado"!

Demasiados postulados



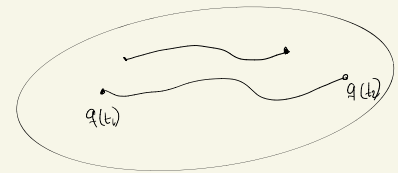
Tomamos la Lagrangiana $L: TM\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

y una curva $q(t)$

$$L(q(t),\dot{q}(t),t):[t_1,t_2]\to\mathbb{R}$$

Definición (Acción)

$$\mathcal{A}=\int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\dot{q}(t),t)\,dt$$



$\mathcal{A}$ depende de la curva $q(t)$, Lagrangiana.

$\mathcal{A}_L(q)$

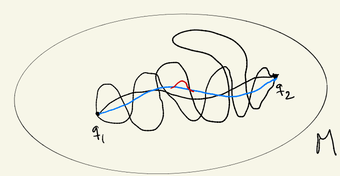
Tiene sentido preguntarse ¿Cuándo $\mathcal{A}$ tiene un mínimo?

Definición

$C^\infty(t_1,q_1,t_2,q_2;M)$

$=\{$ curvas C^∞ $q:[t_1,t_2]\to M \mid q(t_1)=q_1,\ q(t_2)=q_2\}$

$$\mathcal{A}_L: C^\infty(t_1,q_1,t_2,q_2;M)\to\mathbb{R}$$



Idea

Encontrar una $q\in C^\infty$ tal que $\mathcal{A}_L(q)$ es lo más pequeño posible.

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt$$

Problema

$C^\infty L$)

es de dimensión infinita.

Principio de mínima

Maupertuis 1744, 1746

- Euler lo discutió en 1744
- Hay evidencia de que Gottfried Leibniz ya lo sabía 39 años antes.

Vamos a demostrar E-L son la primera variación de $\mathcal{A}_L$ c.r.a q.

Preparativos

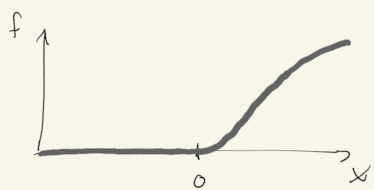
Lema

Sea $I_* = [a, b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \phi_* \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tal que $\phi_* > 0$ en $\operatorname{int}(I_*)$ y $\phi_* = 0$ en $\mathbb{R}\setminus I_*$.

Dem (Idea)

Nos fijamos en la función

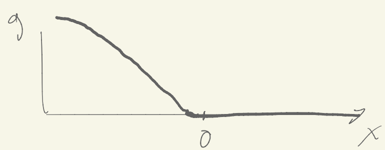
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



Todas las derivadas en $x=0$ son cero y además la función es C^∞ para toda $x \in \mathbb{R}$.

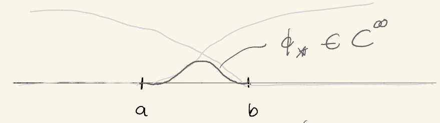
La función es C^∞ pero no es analítica.

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ e^{-1/x^2}, & x < 0 \end{cases}$$



Sea la función ϕ_*

$$\phi_*(x) = f(x-a)\, g(x-b)$$



$\phi_*(x) > 0$ en $\operatorname{Int}(I_*)$

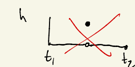
$\phi_*(x) = 0$ en $\mathbb{R}\setminus I_*$

Lema

Sea $I = (t_1, t_2)$, $h \in C^0(I, \mathbb{R})$ tal que $\int_{t_1}^{t_2} h\phi\, dt = 0$, $\forall \phi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$.

Entonces $h = 0$, $\forall\, t \in I$. ($C_0^\infty(I, \mathbb{R})$ es el espacio de funciones C^∞ con $\phi(t_1) = 0 = \phi(t_2)$)

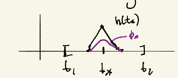
Ojo si h no es continua.



Dem (Lema)

Supongamos que no es verdad.

Existe h continua y $t_* \in \operatorname{int}(I)$ tal que $h(t_*) > 0$



Hay una vecindad V de t_* - $\mathcal{I}$ - $h(t) > 0$, $t \in V$

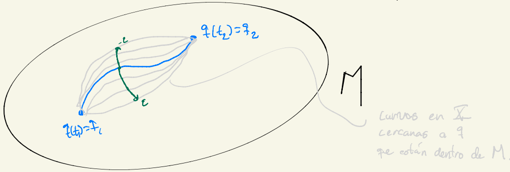
Por el Lema anterior $\exists\, \phi_* \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$ -t.- $\phi_* > 0, V$ y $\phi_* = 0$ $I \setminus I^*$

Entonces $\int_{t_1}^{t_2} h\phi\, dt > 0$. Esto es una contradicción.

$\Rightarrow h = 0 \quad \forall\, t \in I$.

Dem (E-L son la primera variación de $\mathcal{A}_L$)

Sea $\mathbb{X} = C^\infty(t_1, q_1, t_2, q_2; M)$ y sea $q \in \mathbb{X}$ el mínimo de $\mathcal{A}_L$.



Sea q_λ familia parametrizada (uniparamétrica) de curvas en $\mathbb{X}$ tal que $q_0 = q$ (y $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$).

Suponemos que q_λ es dif. c.r.a. λ.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{L}}(\lambda) = \mathcal{A}_L(q_\lambda) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_\lambda, \dot{q}_\lambda, t)\, dt$$

Nos conviene tomar $q_\lambda = q + \lambda\phi$ si $\lambda = 0 \Rightarrow q_0 = q$

donde $\underbrace{\phi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})}_{\tilde{\mathbb{X}}} \{\phi(t_1) = 0,\ \phi(t_2) = 0\}$.

(Nota Fíjese que $\phi \notin \mathbb{X}$)

$$q_\lambda \in (\mathbb{X} + \lambda\tilde{\mathbb{X}}) \subset \mathbb{X} = C^\infty(I; M \mid q_\lambda(t_1) = q_1,\ q_\lambda(t_2) = q_2)$$

Ahora tomamos la derivada con respecto al parámetro λ y evaluamos en $\lambda = 0$.

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{A}_L(\lambda)\Big|_{\lambda=0}$$ esto nos dice como cambia la acción en la dirección de λ cerca de q.

Esto es la primera variación de $\mathcal{A}_L$ en la dirección de λ.