Observaciones

1) En general las ecs de Euler-Lagrange están bien definidas.

2) Modelación
   - Newton (postular fuerza)
   - Lagrange (postular lagrangiano)

3) Casi todos los sistemas Newtonianos se pueden escribir como sistemas Lagrangianos.

Prop

Las ecuaciones de E-L para

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m |\dot{q}|^2 - U(q,t), \quad q \in \mathbb{R}^n$$

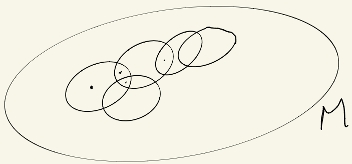
son

$$m \ddot{q} = -\nabla_q U(q,t) \qquad (*)$$

(Todos los sistemas Newtonianos del tipo $(*)$ también son Lagrangianos).

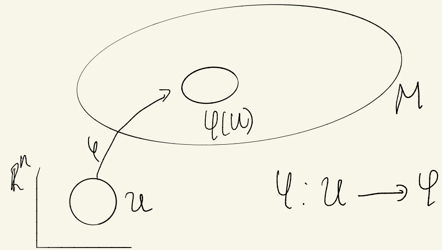
Mecánica Lagrangiana II (Variedades diferenciables)

1) Sea M. Vamos a darle estructura de var. dif. proveyendo una collección numerable de cartas tal que todo punto de M pertenece al menos a una carta.



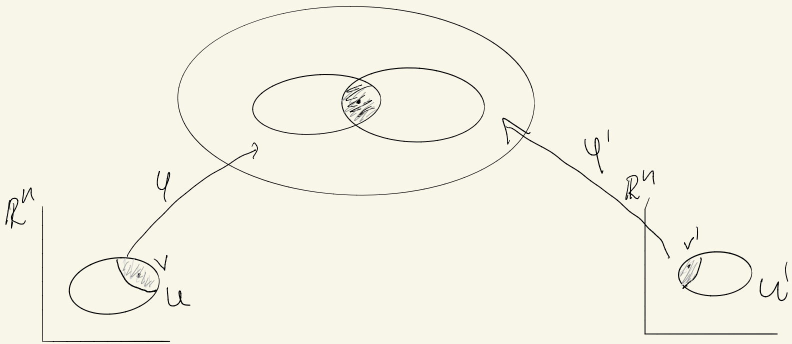
Carta

Conjunto abierto U en $\mathbb{R}^n$ (con coordenadas) $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ y un mapeo 1 a 1 φ de U sobre un subconjunto de M.



$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq M$$

Asumimos que si p y p' en dos cartas U y U' tienen la misma imagen en M, entonces p y p' tienen vecindades $V \subset U$ y $V' \subset U'$ con la misma imagen en M.



$$(\varphi')^{-1} \circ \varphi : V \longrightarrow V'$$

Las cartas U y U' son compatibles si las funciones (de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$) son diferenciables.

Un atlas es la unión de cartas diferenciables.

Dos atlas son equivalentes si su unión es un atlas.

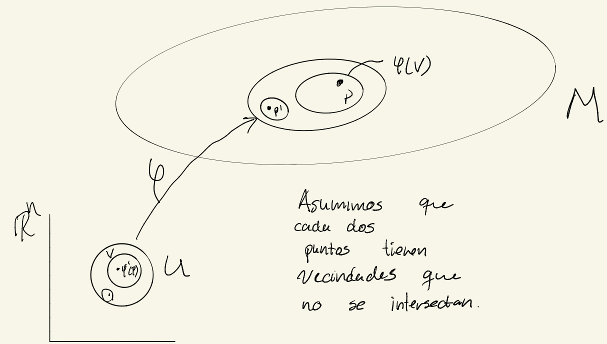
Definición

Una variedad diferenciable es la clase de atlas equivalentes.

- El número n (de $\mathbb{R}^n$) es la dimensión de la variedad.

Vecindad en M

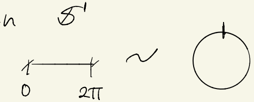
Una vecindad de un punto en una variedad es la imagen bajo $\varphi : U \to M$ de una vecindad de la representación de un punto en la carta U.



Asumimos que cada dos puntos tienen vecindades que no se intersectan.

En mecánica lagrangiana, ejemplos

- .) Partícula puntual en $\mathbb{R}^n$: $M = \mathbb{R}^n$
- ..) m partículas $M = \mathbb{R}^{n \times m}$
- ...) Partícula en S^1



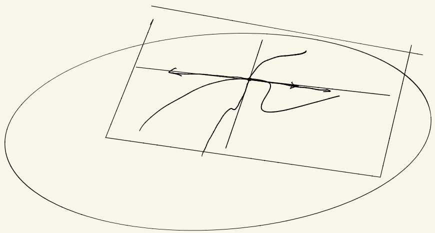
$M = S^1$

2) Lagrangiano depende de posiciones, velocidades, tiempo.

$M \times$ vels en $M \times \mathbb{R}$

Espacio tangente

Vamos a estudiar curvas en M



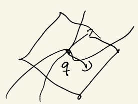
A cada punto de M le vamos a "pegar" un espacio vectorial de dimensión n ($\simeq \mathbb{R}^n$).

Con $n = \dim M$.

Consideramos el espacio de velocidades posibles (vectores en $\mathbb{R}^n$) de curvas $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ que pasan por $q \in M$

(ejemplo $\gamma(0) = q$)

·) $M = \mathbb{R}^n$



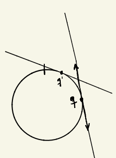
$$q \times \mathbb{R}^n = T_q M$$

El espacio tangente con notación

$$TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \qquad \left(TM = \bigcup_{q \in M} T_q M \right)$$

Llamaremos $T_q M = q \times \mathbb{R}^n$ el espacio tangente a un punto $q \in M$.

··) $M = S^1$

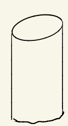


$T_{q'} S^1 = q' \times \mathbb{R}$

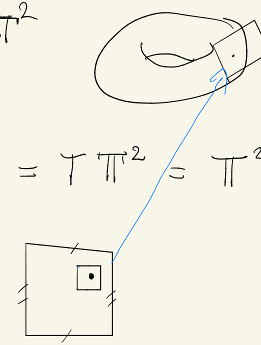
$T_q S^1 = q \times \mathbb{R}$

$TS^1 = S^1 \times \mathbb{R} \simeq$ cilindro

$TS^1 = \bigcup_{q \in S^1} T_q S = \bigcup_{q \in S^1} q \times \mathbb{R} = S^1 \times \mathbb{R}$



Ej $M = \mathbb{T}^2$



$$TM = T\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$$

Lagrangiano

$$L : \underbrace{TM}_{\text{espacio tangente}} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{tiempo}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ejemplos

Partícula en $\mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^n = M$ $\quad v = \dot{q} \in \mathbb{R}^n$

$$TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$L(q, v) = L(TM) = \frac{1}{2} m |\dot{q}|^2 - U(q)$$

Modelo de órbita-espín

$$\left.\begin{array}{l} x \in S^1 \\ f \in S^1 \end{array}\right\} \mathbb{T}^2 \qquad \begin{array}{c} TM = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (x, f) \times (\dot{x}, \dot{f}), \ \mathbb{R} \end{array}$$

$$L(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 - U(x, f, t)$$

Dinámica

Antes escogimos curvas que satisfacen E-L

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(q,\dot{q},t)\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i}(q,\dot{q},t) = 0$$

¿Porqué estas ecuaciones?

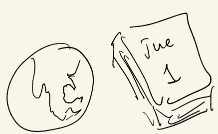
Principio de "mínima acción"

(Principio de Hamilton, Principio de acción estacionaria).

La naturaleza optimiza

Last Thursday-ism.

"El universo se creó el jueves pasado"



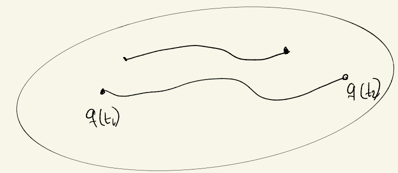
Demasiados postulados

Tomamos la Lagrangiana $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
y una curva $q(t)$

$$L(q(t), \dot{q}(t), t) : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$$

Definición (Acción)

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\,dt$$



$\mathcal{A}$ depende de la curva $q(t)$, Lagrangiana.

$\mathcal{A}_L(q)$

Tiene sentido preguntarse ¿Cuándo $\mathcal{A}$ tiene un mínimo?

Definición

$$C^\infty(t_1, q_1, t_2, q_2; M)$$
$$= \{\text{curvas } C^\infty\ q : [t_1, t_2] \to M \mid q(t_1) = q_1,\ q(t_2) = q_2\}$$

$$\mathcal{A}_L : C^\infty(t_1, q_1, t_2, q_2; M) \to \mathbb{R}$$