Mecánica Lagrangiana

En mecánica Newtoniana

$$m\ddot{q} = F(q,\dot{q},t) \quad \text{(postulado/ axioma)}$$

e.g. sistema conservativo $F = -\nabla_q U$

La fuerza se obtien por consideraciones experimentales, observación, etc.

$(F = F(q,\dot{q},t) \to$ ec. dif. solución local bien definida$)$

Primera aproximación a la mecánica Lagrangiana.

1.- $q \in \mathbb{R}^n$ posición

2.- Sea una funcion llamado Lagrangiano

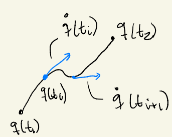
$$L = L(q,\dot{q},t)$$

Ejemplo

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}m|\dot{q}|^2}_{\text{Energía cinética}} - \underbrace{U(q,t)}_{\text{Energía potencial}}$$

q representa un curva

$$q : (t_1, t_2) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{suave } (C^1)$$



Podemos evaluar L en cada $t \in (t_1, t_2)$

¿Cómo nos lleva esto a una regla de evolución de q?

Vamos a introducir una Ley que discrimina algunas curvas sobre el espacio de configuraciones $(\mathbb{R}^n)$ sobre otras.

La curvas buenas se llaman trayectorias y satisfacen la ec.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Ecuación de Euler-Lagrange

Ejemplo (Partícula en $\mathbb{R}^2$)

1.- $q \in \mathbb{R}^2$

2.- $L = \frac{1}{2}m|\dot{q}|^2 - U(q,t)$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - U(q_1, q_2, t)$$

E-L

$i=1$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m2\dot{q}_1\right) + \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0$$

$$\iff m\ddot{q}_1 = -\frac{\partial U}{\partial q_1}$$

$i=2$

$$\dots \iff m\ddot{q}_2 = -\frac{\partial U}{\partial q_2}$$

¡Ecuación de Newton!

Observaciones

1) En general las ecs de Euler-Lagrange están bien definidas.

2) Modelación

Newton (postular fuerza)

Lagrange (postular lagrangiano)

3) Casi todos los sistemas Newtonianos se pueden escribir como sistemas Lagrangianos.

Prop

Las ecuaciones de E-L para

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m |\dot{q}|^2 - U(q,t), \quad q \in \mathbb{R}^n$$

son

$$m \ddot{q} = - \nabla_q U(q,t) \qquad (*)$$

(Todos los sistemas Newtonianos del tipo (*) también son Lagrangianos).