Sea una resonancia $p:q$ $p, q \in \mathbb{Z}$, $q>0$
es una solución periódica de

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{a}{r(t)}\right)^3 \sin\left(2x - 2f(t)\right) = 0$$

para $t \in \mathbb{R}$ $x(t) \in \mathbb{R}$ (en el levantamiento.)

$$x(t + 2\pi q) = x(t) + 2\pi p \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Expandimos las ecuaciones de Kepler c.r.a. e (≈ 0)

$$r = a(1 - e\cos u)$$

$$f = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}\right)$$

Expansión en potencias de $e \approx 0$.

$$\ddot{x} + \varepsilon \sum_{m \neq 0, m=-\infty}^{+\infty} W\left(\frac{m}{2}, e\right) \sin(2x - mt) = 0$$

Con los coeficientes de la tabla 5.1 p 93,
$W\left(\frac{m}{2}, e\right) = W_0^m(e) + W_1^m(e) + W_2^m(e) + \ldots$ donde $W_j^m(e) = O(e^j)$.

$\frac{m}{2}$	$W_0^m(e)$	$W_1^m(e)$	$W_2^m(e)$	$W_3^m(e)$	$W_4^m(e)$	$W_5^m(e)$	$W_6^m(e)$	$W_7^m(e)$
-1					$\frac{e^4}{24}$		$\frac{7e^6}{240}$	
$-\frac{1}{2}$				$\frac{e^3}{48}$		$\frac{11e^5}{768}$		$\frac{313e^7}{30720}$
$\frac{1}{2}$		$-\frac{e}{2}$		$\frac{e^3}{16}$		$-\frac{5e^5}{384}$		$-\frac{143e^7}{18432}$
1	1		$-\frac{5e^2}{2}$		$\frac{13e^4}{16}$		$-\frac{35e^6}{288}$	
$\frac{3}{2}$		$\frac{7e}{2}$		$-\frac{123e^3}{16}$		$\frac{489e^5}{128}$		$-\frac{1763e^7}{2048}$
2			$\frac{17e^2}{2}$		$-\frac{115e^4}{6}$		$\frac{601e^6}{48}$	
$\frac{5}{2}$				$\frac{845e^3}{48}$		$-\frac{32525e^5}{768}$		$\frac{208225e^7}{6144}$
3					$\frac{533e^4}{16}$		$-\frac{13827e^6}{160}$	

Tomamos la ecuación promediada.

Dada una resonancia de orden $p:2$. Definimos el ángulo resonante $\gamma = x - \frac{p}{2}t$ en términos de γ, la ecuación se vuelve.

$$\ddot{\gamma} + \varepsilon W\left(\frac{p}{2}, e\right)\sin 2\gamma + \varepsilon \sum_{m \neq 0, m=-\infty}^{\infty} W\left(\frac{m}{2}, e\right)\sin\left(2\gamma + (p-m)t\right) = 0$$

Promediando, otra vez el pendulo.

$$\ddot{\gamma} + \varepsilon W\left(\frac{p}{2}, e\right)\sin(2\gamma) = 0$$

Energía $\quad \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 - \frac{\varepsilon}{2} W\left(\frac{p}{2}, e\right)\cos(2\gamma) = E$

Escribimos la ecuación de movimiento promediada.

$$\dot{\gamma} = \Gamma$$

$$\dot{\Gamma} = -\varepsilon W\left(\frac{p}{2}, e\right)\sin 2\gamma$$

Si tomamos integracion con el método de Euler Simpléctico, obtenemos.

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n + h\left[-\varepsilon W\left(\frac{p}{2}, e\right)\sin 2\gamma\right]$$

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \Gamma_{n+1} = \gamma_n + \Gamma_n + h\left[-\varepsilon W\left(\frac{p}{2}, e\right)\sin 2\gamma\right]$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Tomamos un paso $h = 2\pi$

$$g(\gamma) = -2\pi W\left(\frac{p}{2}, e\right)\sin(2\gamma)$$

función periódica en γ.

Obtenemos

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n + \varepsilon g(\gamma)$$

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + 2\pi\Gamma_{n+1}$$

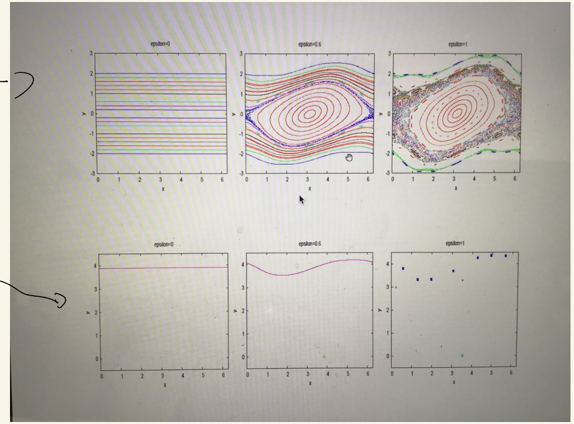
y con el cambio de coordenadas

$$\xi = \gamma, \quad \eta = 2\pi\Gamma$$

obtenemos el mapeo estándar

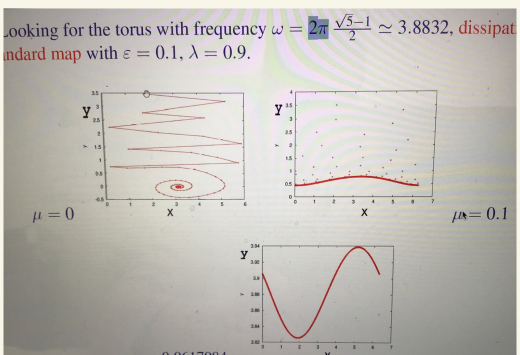
$$\boxed{\begin{aligned} \eta_{n+1} &= \eta_n + \varepsilon f(\xi) \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + \eta_n + \varepsilon f(\xi) \end{aligned}}$$

Caso conservativo



Caso disipativo

En el caso disipativo sólo se tiene un toro invariante.



¡Este es un buen ejercicio!