

Sea una resonancia $P:q$ $P, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$
 es una solución periódica de

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{a}{\sqrt{10}} \right)^3 \sin(2x - 2t) = 0$$

para $t \in \mathbb{R}$ $x(t) \in \mathbb{R}$ (en el levantamiento).

$$x(t + 2\pi q) = x(t) + 2\pi p \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

Expandimos las ecuaciones de Kepler c.r.a. $\varepsilon \ll 0$

$$r = a(1 - e \cos u)$$

$$f = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2} \right)$$

Expansión en potencias de $\varepsilon \ll 0$.

$$\ddot{x} + \varepsilon \sum_{m \neq 0, m \in \mathbb{Z}} W\left(\frac{m}{2}, e\right) \sin(2x - mt) = 0$$

Con los coeficientes de la tabla 5.1 p 93,

$$W\left(\frac{m}{2}, e\right) = W_0^m(e) + W_1^m(e) + W_2^m(e) + \dots$$

donde $W_j^m(e) = O(e^j)$.

$\frac{m}{2}$	$W_0^m(e)$	$W_1^m(e)$	$W_2^m(e)$	$W_3^m(e)$	$W_4^m(e)$	$W_5^m(e)$	$W_6^m(e)$	$W_7^m(e)$
-1								
$-\frac{1}{2}$				$\frac{e^3}{48}$	$\frac{e^4}{24}$	$\frac{7e^6}{240}$	$\frac{313e^7}{30720}$	
$\frac{1}{2}$		$-\frac{e}{2}$		$\frac{e^3}{16}$	$-\frac{5e^4}{24}$	$-\frac{5e^6}{384}$	$-\frac{143e^7}{18432}$	
1	1		$-\frac{5e^2}{2}$	$\frac{13e^4}{16}$	$\frac{48e^6}{128}$	$-\frac{35e^8}{288}$	$-\frac{1763e^9}{2048}$	
$\frac{3}{2}$		$\frac{7e}{2}$		$-\frac{123e^3}{16}$	$-\frac{115e^4}{6}$	$\frac{601e^6}{48}$	$\frac{20827e^7}{6144}$	
2			$\frac{17e^2}{2}$	$\frac{845e^4}{48}$	$-\frac{1257e^6}{768}$	$-\frac{18827e^8}{160}$		
$\frac{5}{2}$				$\frac{533e^4}{16}$				
3								

Tomamos la ecuación promediada.

Dada una resonancia de orden $P:2$. Definimos el ángulo resonante
 $\theta = x - \frac{p}{2}t$ en términos de θ , la ecuación se vuelve.

$$\ddot{\theta} + \varepsilon W\left(\frac{p}{2}, e\right) \sin 2\theta + \varepsilon \sum_{m \neq 0, m \in \mathbb{Z}} W\left(\frac{m}{2}, e\right) \sin(2\theta + (p-m)t) = 0$$

Promediando, otra vez el pendulo.

$$\ddot{\theta} + \varepsilon W\left(\frac{p}{2}, e\right) \sin(2\theta) = 0$$

Energía $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{\varepsilon}{2} W\left(\frac{p}{2}, e\right) \cos(2\theta) = E$

Escribamos la ecuación de movimiento promediada.

$$\dot{I} = \Gamma$$

$$\dot{I} = -\varepsilon W\left(\frac{p}{2}, e\right) \sin 2\theta$$

Si tomamos integración con el método de Euler simpléctico, obtenemos.

$$I_{n+1} = I_n + h \left[-\varepsilon W\left(\frac{p}{2}, e\right) \sin 2\theta^n \right]$$

$$y_{n+1} = y_n + I_{n+1} = y_n + I_n + h \left[-\varepsilon W\left(\frac{p}{2}, e\right) \sin 2\theta^n \right]$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Tomamos un paso $h = 2\pi$

$$g(I) = -2\pi W\left(\frac{p}{2}, e\right) \sin(2\theta)$$

función periódica en θ .

Obtenemos

$$I_{n+1} = I_n + \varepsilon g(I)$$

$$y_{n+1} = y_n + 2\pi I_{n+1}$$

y con el cambio de coordenadas

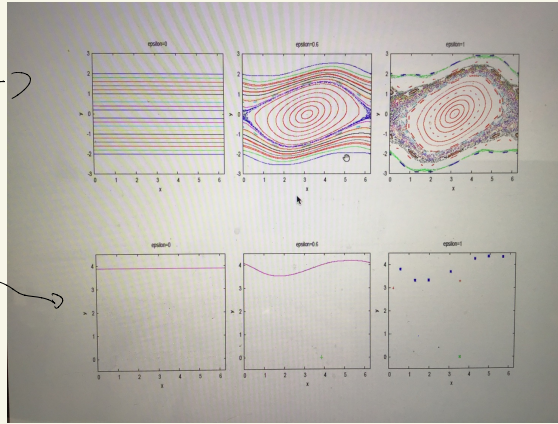
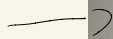
$$\xi = \theta, \eta = 2\pi I$$

obtenemos el mapeo estándar

$$\eta_{n+1} = \eta_n + \varepsilon f(\xi)$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \eta_n + \varepsilon f(\xi)$$

Caso conservativo

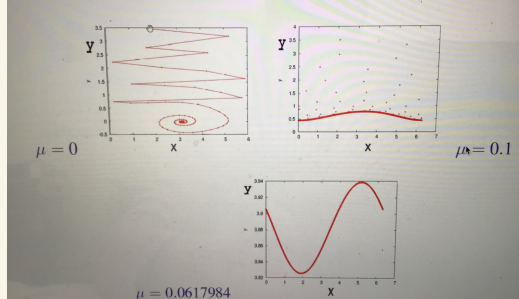


Caso disipativo



En el caso disipativo sólo se tiene un toro invariante.

Looking for the torus with frequency $\omega = 2\pi \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 3.8832$, dissipative standard map with $\varepsilon = 0.1, \lambda = 0.9$.



Este es un buen ejercicio!

Modeling the spin-orbit problem

- Spin-orbit problem:
 - ▷ triaxial satellite \mathcal{S} (with $I_1 < I_2 < I_3$);
 - ▷ center of the satellite moves on a **Keplerian orbit** around a central planet \mathcal{P} ;
 - ▷ spin-axis **perpendicular** to orbit plane and coinciding with **shortest physical axis**;
 - ▷ **NO tidal torque**, due to the non-rigidity.

• Conservative case: equation of motion:

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{a}{r(t)} \right)^3 \sin(2x - 2f(t)) = 0, \quad \varepsilon = \frac{3I_2 - I_1}{2I_3}$$

corresponding to a 1-dim, time-dependent Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(y, x, t) = \frac{y^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{a}{r(t)} \right)^3 \cos(2x - 2f(t)).$$