Problema de Kepler

Leyes de Kepler

1- La órbita de cada planeta es una elipse en la cual el sol está en uno de los focos.

2. El radio de la posición barre iguales áreas en intervalos iguales.

3- El cuadrado del periodo de revolución es proporcional a la tercera potencia del semi-eje mayor.

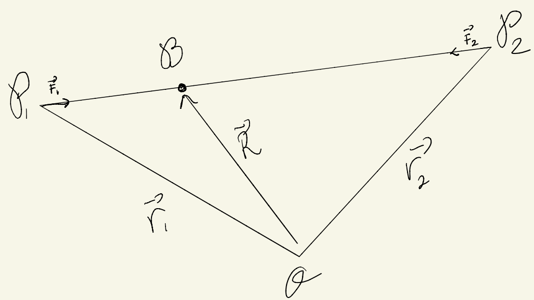
Marco inercial (O, X, Y, Z) O origen

$\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ distancias de P_1 y P_2 al O.

B baricentro de los 2 cuerpos

$\vec{R}$ vector de distancia de O a B

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad |\vec{r}| = r$$



$$\vec{F}_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \quad \text{y} \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \qquad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \qquad (2)$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0}$$

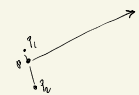
$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{C}_1$$

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{C}_1 t + \vec{C}_2$$

Sea $M = m_1 + m_2$
la posición del baricentro

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

se mueve en línea recta.



Dividimos $(1)/m_1$ y $(2)/m_2$ y restamos.

$$\frac{d^2}{dt}\vec{r} + \mu\frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \qquad \text{(Kepler)}$$

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

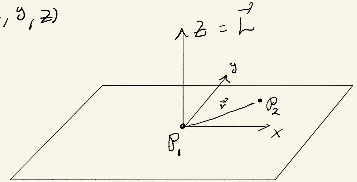
$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$$

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L}$$

A partir de esto en la tarea descubrimos que las partículas se mueven en un plano ortogonal a $\vec{L}$

Plano de referencia.

(P_1, x, y, z)



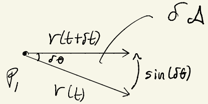
De la tarea sean (r, θ) las coordenadas polares de P_2 c.r.a. P_1.

P_2: $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r\cos\theta & r\sin\theta & 0 \\ \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\cos\theta & \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = r^2\dot{\theta}\hat{k}$$

$$L = r^2\dot{\theta}$$

Sea $A(t)$ el área expandida por el vector $\vec{r}(t)$ al tiempo t. Evaluamos δA el cambio de área entre tiempo t y $t+\delta t$. Sea $\delta\theta$ el ángulo entre $r(t)$ y $r(t+\delta t)$.



$$\delta A = \frac{1}{2} r(t)\, r(t+\delta t) \sin(\delta\theta)$$

La variación de A c.r.a. t.

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{1}{2} r(t)\, r(t+\delta t) \frac{\sin(\delta\theta)}{\delta\theta} \frac{\delta\theta}{\delta t}$$

tomamos el límite cuando $\delta t \to 0$

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} L \leftarrow$$ Segunda ley de Kepler.

Tomamos el producto escalar de (Kepler) con $\dot{\vec{r}}$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \mu \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}}{r^3} = 0$$

Integrando, obtenemos una expresión de la energía.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)^2 - \frac{\mu}{r} = E = K + U \quad \text{(Eng)}$$