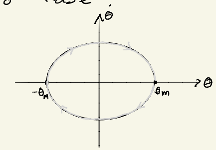
$\theta = 2\pi k$ representa un punto crítico del potencial.
también están $-\pi, \pi$, y multiplos.
En realidad todos los puntos críticos son $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$-2 < E_0 < 0$ dinámica atrapada en la región verde.
θ está entre dos puntos $-\theta_m, \theta_m$ los puntos máximos de la energía potencial.

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \mathcal{U}(\theta)$$

En espacio fase.



La trayectoria es periódica.
$\theta(t)$ es una función periódica.

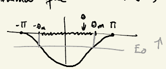
$$T = 2\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(E_0 - \mathcal{U}(\vartheta))}}$$

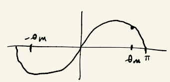
periodo de $\theta(t)$.
$T(E_0)$ es el número mínimo tal que
$$\theta(t+T) = \theta(t)$$

$$T = 2\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(E_0 + 1 + \cos\vartheta)}}$$

El periodo es finito si $-2 < E_0 < 0$

$E_0 + 1 + \cos\theta$.
Alrededor de θ_m (tenemos que $\theta - \theta_m < 0$)





Siempre asumimos que $\theta_m < \pi$.

$$E_0 + 1 + \cos\theta = \cancel{(E_0 + 1 + \cos\theta_m)}^{0} + (\theta - \theta_m)(-\sin(\theta_m)) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_m)^2(-\cos\theta_m) + \mathcal{O}((\theta-\theta_m)^3)$$

$$= 0 + (\theta_m - \theta)\, g(\theta)$$

$g(\theta_m) = +\sin\theta_m > 0$
$g(\theta) > 0$ para θ cercana a θ_m

$$T = 2\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{ds}{\sqrt{2(E_0 + 1 + \cos(s))}}$$

Vamos a estimar

$$\int_{\theta_1}^{\theta_m} \frac{ds}{\sqrt{2(\theta_m - s)\, g(s)}}$$ con θ_1 cercano a θ_m

$$\leq \underbrace{\boxed{\max_{\theta \in [\theta_1, \theta_m]} \frac{1}{\sqrt{2 g(\theta)}}}}_{\leq C} \int_{\theta_1}^{\theta_m} \frac{ds}{\sqrt{\theta_m - s}} \leq C \int_0^{\theta_m - \theta_1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = C(\theta_m - \theta_1)^{1/2}$$

La integral es finita entonces el periodo es finito.
Se puede demostrar que $\frac{dT}{dE_0} \geq 0$ $\quad E_0 \to 0$ aumenta a cero $\quad T \to \infty$

$$T = 2\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{ds}{\sqrt{2(E_0 + 1 + \cos(s))}} = T(E_0) = \int_{-\cos^{-1}(-1-E_0)}^{\cos^{-1}(-1-E_0)} \frac{ds}{\sqrt{2(E_0 + 1 + \cos(s))}}$$

Tambien θ_m depende de E_0
$$\cos\theta_m = -1 - E_0$$
$$\theta_m = \cos^{-1}(-1 - E_0)$$

Cuando $\theta_m = \pi$, $E_0 = 0$

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{\sqrt{2(1 + \cos\theta)}}$$

θ cercano a π
$$1 + \cos\theta = \cancel{1 + \cos\pi}^{0} - \cancel{(\theta - \pi)\sin\pi}^{0} - \frac{1}{2}(\theta-\pi)^2 \cancel{\cos\pi}^{-1} + \mathcal{O}((\theta-\pi)^3)$$
$$= \frac{1}{2}(\theta - \pi)^2\, \tilde{g}(\theta)$$

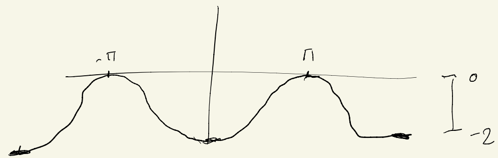
En los extremos

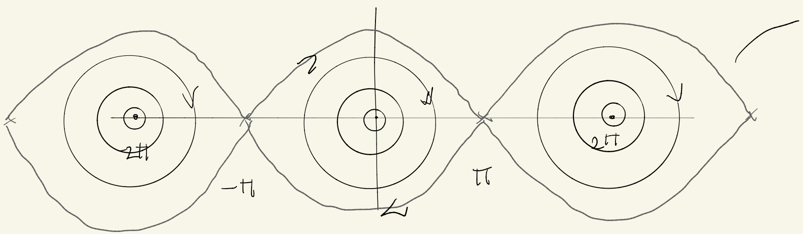
$$\int_{\pi - \varepsilon}^{\pi} \frac{ds}{\sqrt{(s-\pi)^2}\sqrt{\tilde{g}(s)}} = C \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x}$$

Esta integral diverge logaritmicamente.

Sobre la energía

$$E = \frac{1}{2}v^2 + U(\theta)$$





Se llama separatiz

Tarda tiempo infinito de $-\pi$, π. y la integral del tiempo diverge logarítimicamente cerca de π y $-\pi$.