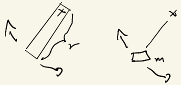
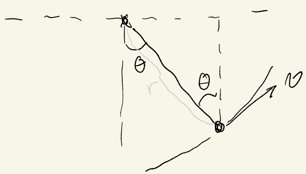
Pendulo matemático



Energía potencial

mgh altura de la maso

$\sim \frac{GM}{R^2}$ $h \ll R$



$v = r\dot{\theta}$, $K = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2$

$U(\theta) = mgh$

$h = -r - r\cos\theta$

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr(1+\cos\theta)$$

Ecuaciones de movimiento.

$$mr\ddot{\theta} = -\frac{d}{d\theta}(mgr(1+\cos(\theta)))$$

$$= -mgr\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

Reescalar el tiempo y ...

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta \quad , \quad E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - (1+\cos\theta)$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\sin\theta = 0$$

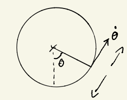
$\theta \in \mathbb{R}$ un sistema de 1 grado de libertad.

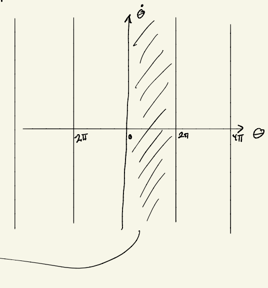
θ es un angulo.

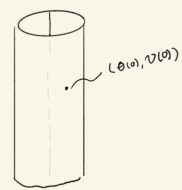
$\theta \in S^1$ $S^1 = [0, 2\pi]$ con extremos identificados.

Espacio fase $(\theta, \dot{\theta}) \in S^1 \times \mathbb{R}$ cilindro.

$\dot{\theta} \in \mathbb{R}$





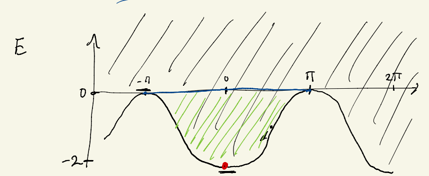


$\dot{\theta} = v$

$\dot{v} = -\sin\theta$

Energía potencial.

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - (1+\cos\theta) \geq (-1-\cos\theta) \geq -2$$



$E_0 \in [-2, \infty)$

Si $E_0 \in [-2, 0)$

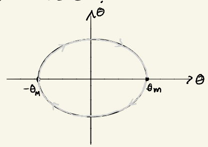
Si $E_0 = -2$ mínimo de la energía $\dot{\theta} = 0$, $-(1+\cos\theta) = -2$, $\cos\theta = 1$, $\theta = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\theta = 2\pi k$ representa un punto crítico del potencial.
también están $-\pi, \pi$, y multiplos.
En realidad todos los puntos críticos son $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$-2 < E_0 < 0$ dinámica atrapada en la región verde.
θ está entre dos puntos $-\theta_m, \theta_m$ los puntos máximos de la energía potencial.

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + U(\theta)$$

En espacio fase.



La trayectoria es periódica.

$\theta(t)$ es una función periódica.

$$T = 2\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(E_0 - U(\vartheta))}}$$

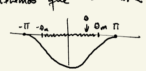
periodo de $\theta(t)$.

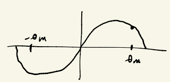
$T \in \mathbb{R}^+(0)$ es el número mínimo tal que
$\theta(t+T) = \theta(t)$

$$T = 2\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(E_0 + 1 + \cos\vartheta)}}$$

El periodo es finito si $-2 < E_0 < 0$

$E_0 + 1 + \cos\theta$.
Alrededor de θ_m (tenemos que $\theta - \theta_m < 0$)





$$E_0 + 1 + \cos\theta = \cancel{(E_0 + 1 + \cos\theta_m)}^{=0} + (\theta - \theta_m)(-\sin(\theta_m)) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_m)^2(-\cos\theta_m) + \theta((\theta-\theta_m)^3)$$

$$= 0 + (\theta_m - \theta)\,g(\theta)$$

$\checkmark$ $g(\theta_m) = +\sin\theta_m > 0$
$g(\theta) > 0$ para θ cercana a θ_m

$$T = 2\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{dS}{\sqrt{2(E_0 + 1 + \cos(S))}}$$

Vamos a estimar

$$\int_{\theta_1}^{\theta_m} \frac{dS}{\sqrt{2(\theta_m - S)\,g(S)}}$$ con θ_1 cercano a θ_m

$$\leq \underbrace{\boxed{\max_{\theta \in [\theta_1, \theta_m]} \frac{1}{\sqrt{2g(\theta)}}}}_{\leq C} \int_{\theta_1}^{\theta_m} \frac{dS}{\sqrt{\theta_m - S}} \leq C \int_0^{\theta_m - \theta_1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = C(\theta_m - \theta_1)^{1/2}$$

La integral es finita entonces el periodo es finito.