Para interacciones conservativas, centrales sin fuerzas externas.

Conservación de

Energía. (1)

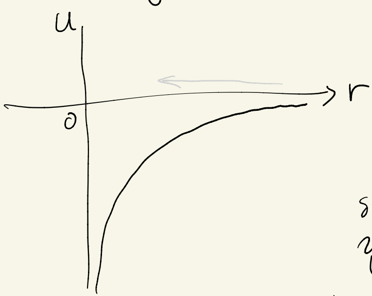
Momento total (3)

Momento angular total (3)

Ejemplos de interacciones binarias

$$U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \rightarrow U_{ij}(r) \quad , \quad r = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

Fuerza gravitacional. $U = -\dfrac{1}{r}$



$$F = -\frac{d}{dr}U = -\frac{1}{r^2}$$

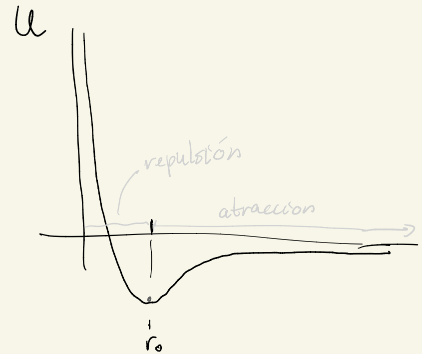
Si se conserva la energía y el momento angular total.

Problema de dos cuerpos

$\dot{r}(0)$ apunta hacia el centro.
Mostrar que la partícula alcanza el centro en tiempo finito.

También es posible encontrar soluciones donde $r \rightarrow \infty$ en tiempo finito para el problema de n-cuerpos.

Modelos de fuerzas entre átomos/moléculas



Sistemas conservativos de "un grado de libertad"

$$m\ddot{q} = F(q), \quad F(q) = -\frac{d}{dq}U(q)$$

$q \in \mathbb{R}$ (un grado de libertad)

Ej 1

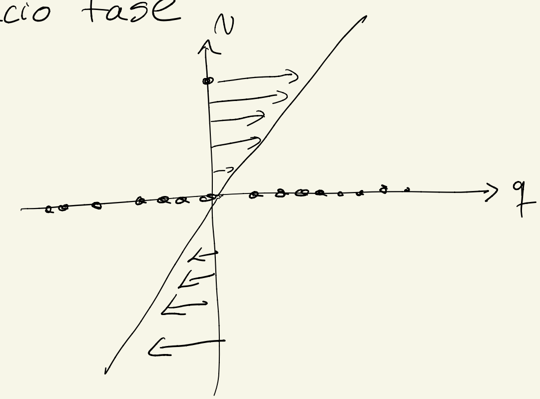
$$m\ddot{q} = 0 \qquad U = c$$

$$\dot{q} = v$$

$$\begin{cases} \dot{q} = v & q(0) = q_0 \\ m\dot{v} = 0 & v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$q(t) = v_0 t + q_0$$

Espacio fase



Definición

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo si $f(\tilde{x}) = 0$

Si $\tilde{x} = x_0$ es un punto fijo entonces $x(t) = \tilde{x} \ \forall t \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$0 = 0$ es solución

Nuestro primer ejemplo.

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= 0 \end{aligned} \implies v = 0$$

Hay una línea de puntos fijos $(v = 0, q \in \mathbb{R})$

En sistemas conservativos de 1 g.d.l.

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}F(q) \end{aligned} \quad \overset{\text{Punto fijo}}{\implies} \quad \begin{aligned} v &= 0 \\ F(q) &= 0 \end{aligned}$$

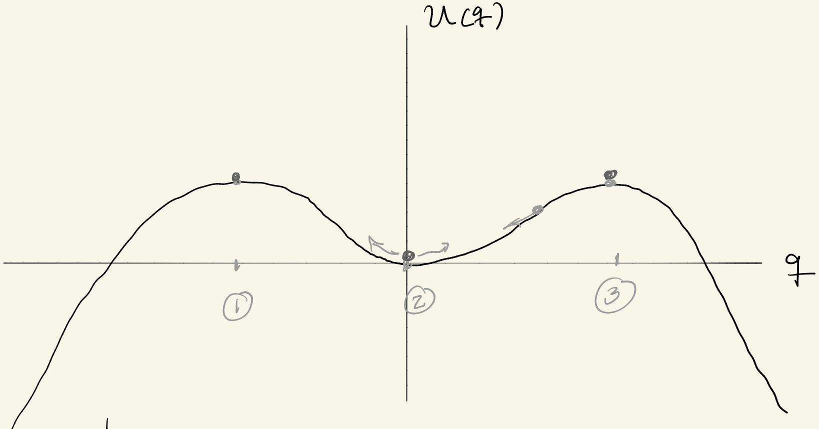
corresponde a todas las q^* tales que $F(q^*) = 0$

En mecánica los puntos fijos se llaman equilibrios.

Sistemas conservativos.

$$m\ddot{q} = -\frac{dU(q)}{dq}$$

Un punto fijo de un sistema conservativo corresponde a puntos críticos del potencial.



Intuitivamente sabemos que

en 1 y 3 la partícula se alejaría con una pequeña perturbación. Inestables.

en 2 la partícula + perturbación no se aleja. Estable.

La conservación de la energía permite el análisis completo.

Tenemos una solución en espacio fase.

$(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^2$

Energía: $\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + U(q) = \text{constante}.$

Las trayectorias del espacio (plano) fase se mueven sobre las curvas de nivel $E(q, \dot{q}) = \text{constante}.$

$$E(q, v) = \frac{1}{2} m v^2 + U(q) = C \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$

Prop Sea $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ clase C^1 en $\mathbb{R}^2$, y (q_0, v_0) tal que $(\nabla E)(q_0, v_0) \neq (0,0)$

Entonces $E(q,v) = E(q_0, v_0)$ es una curva clase C^1 alrededor de (q_0, v_0)

Dem Teorema de la función implícita.

Ejemplo 1

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k q^2 \quad (\text{oscilador armónico})$$

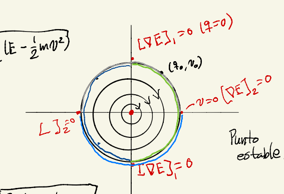
$q = \sqrt{\frac{2}{k}\left(E - \frac{1}{2} m v^2\right)}$

(q_0, v_0), $E(q_0, v_0) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k q_0^2 = E$

$\nabla E(q, v) = (k q, m v)$, se satisface la ecuación

$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k q^2$

$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2} k q^2\right)}$



El único lugar donde $\nabla E(q_0, v_0) = (0,0)$ es $(0,0)$.