Fuerzas centrales y leyes de conservación.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\nabla_{\vec{r}_i} \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$ energía potencial en forma central.

Tenemos conservación de la Energía

$$E = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}_i|^2 + \mathcal{U}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_s)$$

Definición

$$m = \sum_{i=1}^{s} m_i \quad : \text{ masa total del sistema}$$

$$p_i = m_i \vec{v}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i : \text{ momento de la partícula } m_i$$

$$P = \sum_{i=1}^{s} p_i = \sum_{i=1}^{s} m_i \dot{\vec{r}}_i : \text{ momento total.}$$

$$R = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{s} m_i r_i \quad : \text{ centro de masa (baricentro)}$$

Cuando las partículas están en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$

$$L_i = m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \quad : \text{ momento angular de la partícula } m_i.$$

En el libro de Arnold. lo denotan por producto cuña $\wedge$ $\quad L_i = m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i$

$$L = \sum_{i=1}^{s} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \quad : \text{ momento angular total.}$$

(con respecto al punto $\bar{0}$)

Se pueden definir con respecto a otro punto.

$\vec{C} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\vec{r}}_i = \vec{r}_i - \vec{C}$

La notación es R^c, L_i^c, L^c con respecto al punto $\vec{C}$.

Otra definición

$$I_i = m_i \vec{r}_i^{\,2} \quad : \text{ momento de inercia de la partícula } m_i$$

$$I = \sum_{i=1}^{s} m_i \vec{r}_i^{\,2} \quad : \text{ momento de inercia total del sistema.}$$

(Nos dice que tan extendido está el sistema).

sist. de s-partículas

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\nabla_{\vec{r}_i} \mathcal{U} + \tilde{F}_i$$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_s)$: energía potencial central.

Proposición

$$\frac{d}{dt}(m\dot{R}) = \sum_{i=1}^{s} \tilde{F}_i$$ — suma fuerzas externas

Si $\sum_{i=1}^{s} \tilde{F}_i = 0$ entonces $m\dot{R} =$ constante

(Si $m\dot{R} =$ cte. entonces la dinámica de $R(t) = \alpha t + \beta$. El centro de masa se mueve en una línea recta).

Dem

$$\frac{d}{dt}(m\dot{R}) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{s} m_i \dot{\vec{r}}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{\substack{j=1,\dots,s \\ j\neq i}} F_i^{(j)} + \tilde{F}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{\substack{j=1,\dots,s \\ j\neq i}} F_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{s} \tilde{F}_i$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1,\dots,s \\ i<j}} \underbrace{\cancel{\left(F_i^{(j)} + F_j^{(i)}\right)}}_{=0} + \sum_{i=1}^{s} \tilde{F}_i$$

Sabemos que $F_i^{(j)} = -F_j^{(i)}$

$$= \sum_{i=1}^{s} \tilde{F}_i$$ sólo quedan las fuerzas externas. //

Si no hay fuerzas externas, entonces el momento total es una cantidad conservada.

Proposición 2

$$\frac{d}{dt}L = \sum_{i=1}^{s} \vec{r}_i \times \tilde{F}_i$$ ⟶ suma de los momentos de las fuerzas externas.

(Es decir que si $\tilde{F}_i = 0$, entonces L = constante.)

Dem

$$\frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{s} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right)$$

(En la tarea demostrar que $\times$ tiene propiedades de producto.)

$$= \cancel{\sum_{i=1}^{s} m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i}^{\,0} + \sum_{i=1}^{s} m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \vec{r}_i \times \left(\sum_{\substack{j=1,\dots,s \\ j\neq i}} F_j^{(i)} + \tilde{F}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} \vec{r}_i \times \left[g_i^{(j)}(|r_i - r_j|)\cdot(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \sum_{i=1}^{s} r_i \times \tilde{F}_i\right]$$

donde

$$g_i^{(j)} = \frac{U'_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad / \quad g_i^{(j)} = g_j^{(i)}$$

$$\frac{d}{dt}L = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{s} \sum_{j=1}^{s} g_i^{(j)} \left[\cancel{(\vec{r}_i \times \vec{r}_i)} - (\vec{r}_i \times \vec{r}_j)\right] + \sum_{i=1}^{s} r_i \times \tilde{F}_i$$

$$= -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{s} \sum_{j=1}^{s} g_i^{(j)}\cdot(\vec{r}_i \times \vec{r}_j) + \sum_{i=1}^{s} \vec{r}_i \times \tilde{F}_i$$

$$= -\sum_{\substack{i,j=1,\dots,s \\ i<j}} \cancel{\left[g_i^{(j)}\cdot(\vec{r}_i \times \vec{r}_j) + g_j^{(i)}\cdot(\vec{r}_j \times \vec{r}_i)\right]}^{\,0} + \sum_{i=1}^{s} \vec{r}_i \times \tilde{F}_i$$

$$\vec{r}_i \times \vec{r}_j = -\vec{r}_j \times \vec{r}_i$$

//