Fuerzas centrales

1) Sistemas de s partículas conservativos

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1,\dots,s \\ j\neq i}} F_i^{(j)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \tilde{F}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$$

2) Gravitación $\quad F_i = \sum_{\substack{j=1,\dots,s \\ j\neq i}} F_i^{(j)} = \sum_{\substack{j=1,\dots,s \\ j\neq i}} -G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

Ley de gravitación de Newton.

Prop

$$F_i = -\nabla_{\vec{r}_i} \mathcal{U}$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,j=1,\dots,s \\ k\neq j}} \left(-G \frac{m_k m_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \right)$$

$$\mathcal{U}_{kj} = -G \frac{m_k m_j}{|r_k - r_j|}$$: energía potencial gravitacional de m_k, m_j

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k\neq j}}^{s} \mathcal{U}_{kj} \quad \left(= \sum_{k<j} \mathcal{U}_{kj} \right)$$

Dem

$$F_i = -\nabla_{\vec{r}_i} \mathcal{U}$$

$$= \frac{G}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{s} \nabla_{\vec{r}_i} \left(\frac{m_k m_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \right)$$

$$= \frac{G}{2} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} \nabla_{\vec{r}_i} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{s} \nabla_{\vec{r}_i} \left(\frac{m_k m_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} \right) \right]$$

$$= \frac{G}{2} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{s} \nabla_{\vec{r}_i} \left(\frac{m_i m_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} \right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{s} \nabla_{\vec{r}_i} \left(\frac{m_k m_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} \right) \right]$$

$$= G \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{s} \nabla_{\vec{r}_i} \left(\frac{m_i m_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right)$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{s} -G \frac{m_i k_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_k)$$

✓

Fuerza central (entre partículas)

La energía potencial es la suma de energías potenciales $\mathcal{U}_{ij}$ de interacciones binarias. Sólo dependen de la distancia entre las partículas i, j.

$$m\ddot{\vec{r}}_i = -\nabla_{\vec{r}_i}\mathcal{U}, \quad i=1,\dots,s$$

con
$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i\neq j}} \mathcal{U}_{ij}(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|),$$

$$\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_{ji}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i\neq j}} \mathcal{U}_{ij}(\quad) = \sum_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} \mathcal{U}_{ij}(\quad)$$

Proposición

Si $F_i = -\nabla_{\vec{r}_i}\mathcal{U}$ de fuerza central.

$$\Rightarrow F_i = \sum_{\substack{j=1,\dots,s\\ j\neq i}} g_i^{(j)}(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$$

donde $g_i^{(j)}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $j=1,\dots,s$, $(j\neq i)$

Dem

$$F_i = -\nabla_{\vec{r}_i}\Big(\frac{1}{2}\sum_{\substack{k,j=1,\dots,s\\ k\neq j}} \mathcal{U}_{kj}(|\vec{r}_k-\vec{r}_j|)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{j=1,\dots,s\\ j\neq i}} \mathcal{U}'_{ij}(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)\frac{\vec{r}_i-\vec{r}_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|} + \sum_{\substack{k=1,\dots,s\\ k\neq i}} \mathcal{U}'_{ki}(|\vec{r}_k-\vec{r}_i|)\frac{\vec{r}_i-\vec{r}_k}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i|}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{j=1,\dots,s\\ j\neq i}} \frac{\mathcal{U}'_{ij}(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$$

definimos
$$g_i^{(j)}(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|) = \frac{\mathcal{U}'_{ij}(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$$

Ejemplo Gravitación de Newton

$$g_i^{(j)} = -G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|^2}\cdot\frac{1}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$$

Proposición

Para un potencial central

$$(U_{ij} = U_{ji}) \Rightarrow F_i^{(j)} = -F_j^{(i)}$$

$$F_i^{(j)} = \frac{U'_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$F_j^{(i)} = \frac{U'_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

"acción - reacción"

Tercera Ley de Newton

A toda fuerza sobre un cuerpo corresponde otra fuerza de la misma magnitud pero en sentido contrario.