Campo de fuerzas

La idea es que la masa M crea un campo gravitacional que afecta el movimiento de cada masa m.

Tiene sentido $m << M$.

M no se mueve

Campo electrico

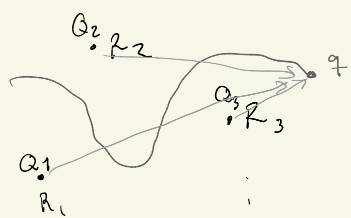
$$m\ddot{\vec{r}} = qE, \quad E = C\frac{Q}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = \nabla\left(-C\frac{Q}{|\vec{r}|}\right)$$

$$E = \nabla \phi_{el}, \quad \phi = -C\frac{Q}{|\vec{r}|}$$

Campo electrostático

Q_i cargas eléctricas situadas en $\vec{R}_i$

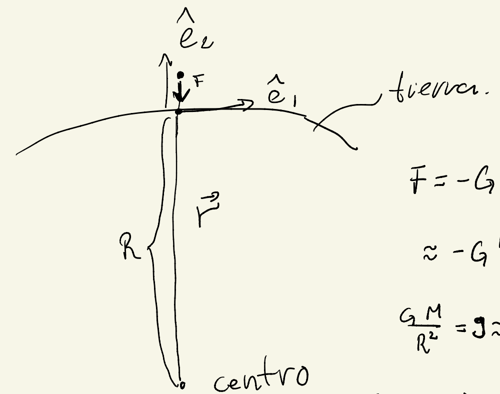
$$E = \sum_i C\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{R}_i|^3}(\vec{r}-\vec{R}_i) = \nabla\sum_i\left(-C\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{R}_i|}\right)$$



Sabemos que el sistema es conservativo.

$\exists\, U$ tal que $m\ddot{\vec{r}} = q\underline{E}$
$= -\nabla U$

Nota (una simplificación)



$$F = -G\frac{Mm}{|\vec{r}|^2}\hat{r} \approx -G\frac{Mm}{R^2}\hat{e}_2 = -mg\hat{e}_2$$

$$\frac{GM}{R^2} = g \approx 9.8\ m/s^2$$

$|\vec{r}| = R+h$

$\frac{h}{R} << 1$

$$m\ddot{x} = -\nabla U$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad U = mgx_2$$

$$E = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + mgx_2$$

Conservativo.

Sistemas disipativos

$q \in \mathbb{R}^n$, $\quad m\ddot{q} = -\nabla U(q) - \alpha \dot{q}$ $\quad q(t)$ trayectoria. $\quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

¿Qué pasa con la energía?

$$E = \frac{1}{2} m \underbrace{|\dot{q}|^2}_{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle} + U(q)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \cancel{2} m \langle \dot{q}(t), \ddot{q}(t) \rangle + \langle \nabla U(q(t)), \dot{q}(t) \rangle$$

$$= \langle \dot{q}(t), -\nabla U(q(t)) - \alpha \dot{q}(t) \rangle + \langle \nabla U(q(t)), \dot{q}(t) \rangle$$

$$= \cancel{\langle \dot{q}(t), -\nabla U(q(t)) \rangle} - \alpha \langle \dot{q}(t), \dot{q}(t) \rangle + \cancel{\langle \dot{q}(t), \nabla U(q(t)) \rangle}$$

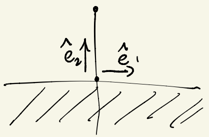
$$= -\alpha |\dot{q}(t)|^2 \quad \text{pérdida de energía}$$

Nota

En vez de $-\alpha \dot{q} \rightsquigarrow -\alpha h(|\dot{q}|) \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|}$

con $h(|\dot{q}|) > 0$

Ejemplo Paracaidas



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 \leq 0$$

$$m\ddot{x}_1 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 = -mg - \alpha \dot{x}_2^2 \frac{\dot{x}_2}{|\dot{x}_2|} = -mg + \alpha \dot{x}_2^2$$

$$x_2 = q, \quad \dot{x}_2 = v$$

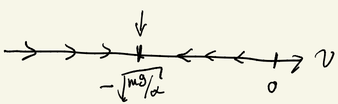
$$U(x) = m g x_2$$

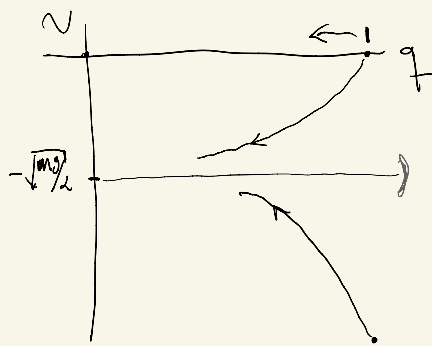
$$-\nabla U(x) = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{q} = v \qquad (1)$$

$$\dot{v} = -g + \frac{\alpha}{m} v^2 \qquad (2)$$

Aceleracion $= 0$ de (2) $\quad \dot{v} = 0 \rightsquigarrow v^2 = mg/\alpha$ ó $v = -\sqrt{mg/\alpha}$





Atractor de la dinámica.