$$m\ddot{q} = F(q)$$

La fuerza depende de la posición de todas las partícula.

$q \in \mathbb{R}^n$

El sistema es conservativo si

$$F(q) = -\nabla U(q) = -(\partial_{q_1} V(q), \dots, \partial_{q_n} V(q))$$

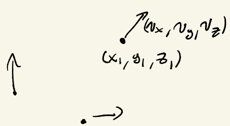
$U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\partial_{q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}$$

U : potencial de energía de las partículas.

Problema de valores iniciales.

$$\dot{q} = v \qquad q(0) = q_0$$
$$\dot{v} = F(q)/m \qquad v(0) = v_0$$



$\langle x, y \rangle$ Producto interno euclidiano en $\mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$E(q,v) = \frac{1}{2} m |v|^2 + U(q) \quad \text{(Energía)}$$

En una trayectoria $q(t), v(t)$

$$\frac{d}{dt} E(q(t), v(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \langle v(t), v(t) \rangle + U(q(t))\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2} \langle \dot{v}(t), v(t) \rangle + \langle \nabla U(q(t)), \dot{q}(t) \rangle$$

$\dot{q} = v$
$\dot{v} = F(q)/m$

$$= \cancel{m} \langle F(q(t))/\cancel{m}, v(t) \rangle + \langle \nabla U(q(t)), v(t) \rangle$$

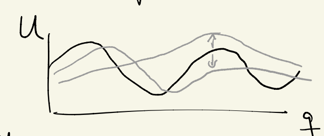
$$= -\cancel{\langle \nabla U(q(t)), v(t) \rangle} + \cancel{\langle \nabla U(q(t)), v(t) \rangle}$$

$$= 0$$

Esta definición de energía se conserva en el tiempo.

Observación

Si $U(q,t)$



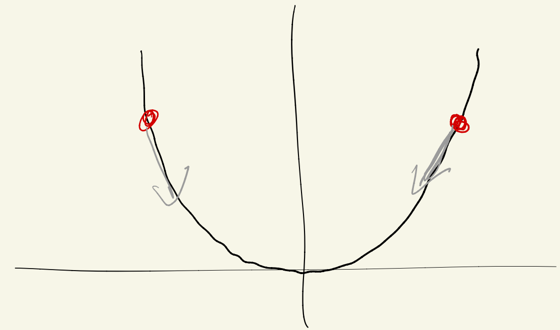
$$\frac{d}{dt} E = (\qquad) + \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$$

Ej

$$m\ddot{q} = -kq \qquad F(q) = -kq = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kq^2\right)$$

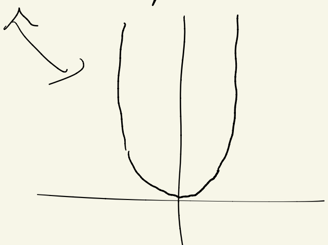
$$U(q) = \frac{1}{2}kq^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q} + \frac{1}{2}kq^2$$



Resorte no-lineal

$$U(q) = +\frac{1}{2}kq^2 + \alpha q^4, \quad \alpha > 0$$



$$F(q) = -kq - 4\alpha q^3$$

Otra posibilidad