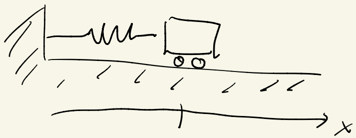
Un ejemplo sencillo



$m\ddot{x} = -kx$ ¡Es una ecuación lineal!

$\ddot{x} = -k/m\, x$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -k/m\, x \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{A} - \lambda I)v = 0$$

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I) = 0$$

$$\mathbb{A} - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -k/m & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I) = \lambda^2 + k/m = 0$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{k/m}$$

$$x(t) = \tilde{C}_1 e^{i\sqrt{k/m}\,t} + \tilde{C}_2 e^{-i\sqrt{k/m}\,t}$$

(fórmula de de Moivre)

$$e^{i\sqrt{k/m}\,t} = \cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$$

$$= C_1 \cos\sqrt{k/m}\,t + C_2 \sin\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -C_1\sqrt{k/m}\,\sin\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + C_2\sqrt{k/m}\,\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{m}{2} v(t)^2 + \frac{k}{2} x(t)^2 \Big\} \text{ elipses}$$

$$= \frac{m}{2}\left(-c_1\sqrt{k/m}\,\sin\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + c_2\sqrt{k/m}\,\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)\right)^2$$

$$+ \frac{k}{2}\left(c_1 \cos\sqrt{k/m}\,t + c_2 \sin\left(\sqrt{k/m}\,t\right)\right)^2$$

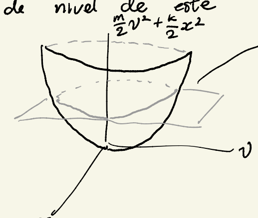
$$= \frac{1}{2}\left(c_1^2\, k \sin^2\left(\sqrt{k/m}\,t\right) - 2c_1c_2\, k\, \cancel{\operatorname{sen}\left(\sqrt{k/m}\,t\right)\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)} + c_2^2\, k \cos^2\left(\sqrt{k/m}\,t\right)\right)$$

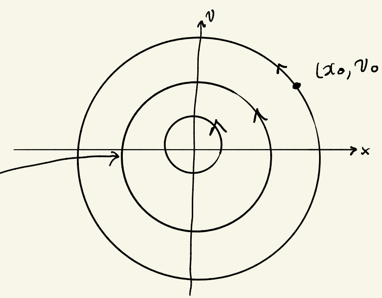
$$+ \frac{1}{2}\left(c_1^2 k \cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)^2 + k c_1 c_2\, \cancel{\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)\sin\left(\sqrt{k/m}\,t\right)} + k c_2^2 \sin^2\left(\sqrt{k/m}\,t\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} c_1^2 k + \frac{1}{2} k c_2^2 = \frac{k}{2}\left(c_1^2 + c_2^2\right)$$

$$\frac{m}{2} v^2 + \frac{k}{2} x^2 = \text{cte} = \text{cte}(x_0, v_0)$$

La trayectoria se mueve sobre las curvas de nivel de este paraboloide.





Las trayectorias siempre están acotadas.

→ Las trayectorias existen para todo tiempo. (El intervalo maximal de existencia $\mathbb{R}$).

Para todo valor de t la fórmula

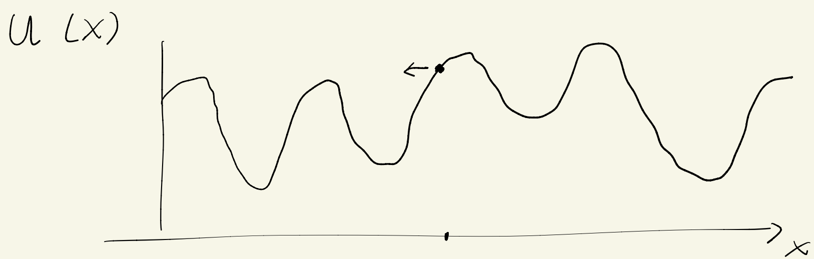
$$\frac{m}{2}v(t)^2 + \frac{k}{2}x(t)^2 = cte$$

A cte la vamos a llamar Energía.

Sistemas conservativos.

$x \in \mathbb{R}$

Decimos que un sistema es conservativo si $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$, U es el potencial.



En una dimensión por TF del Cálculo $\forall\ F(x)\ \exists\ U(x)$ tal que

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

En una dimensión llamamos energía a la expresión

$$E(t) = T + U$$

donde

(Energía cinética) $T = \frac{1}{2} m v(t)^2 = \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2$

(Energía potencial) $U = U(x(t))$

Teo La energía se conserva. ($E(t)$ = constante)

Dem

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt}T(t) + \frac{d}{dt}U(x(t))$$

$$= m\,\dot{x}(t)\,\ddot{x}(t) + \frac{dU(x(t))}{dx}\cdot\dot{x}(t)$$

$$= \dot{x}(t)\left[m\,\ddot{x}(t) - F(x)\right] = 0$$

ya que $m\ddot{x}(t) = F(x)$ 2da Ley de Newton.

… y en $x \in \mathbb{R}^n$.

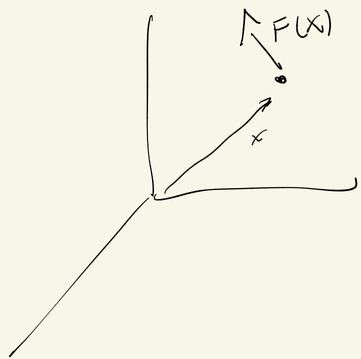
Un sistema conservativo en $\mathbb{R}^n$ es tal que $F(x) = -\nabla U(x)$

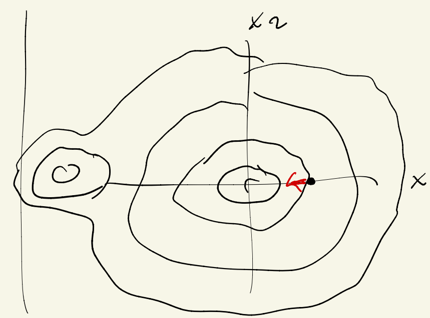
$$U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \implies F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

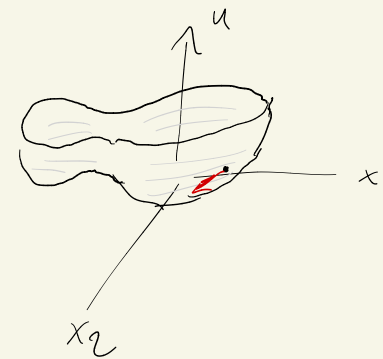
$x = (x_1, \dots, x_n)$

Gradiente.

$$\nabla U(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial U(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U(x)}{\partial x_n} \right)$$







$-\nabla U(x)$ apunta en la dirección de máximo decrecimiento.