En el video

Picard

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds$$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_n(s))\,ds$$

$t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, f - Lip

$$T(x) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds$$

Resultado

Hay una única solución en $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

$x \in C^1$

Peano

f es continua $\Rightarrow$ $\exists$ solución (no necesariamente única)

Teo

Bajo hipótesis de $\exists!$ de (Picard-Lindelöff) sabemos que las soluciones son únicas para todos los tiempos para los cuales existen.

Dem

$x(t)$, $y(t)$, $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$

$$|x(t)-y(t)| = |x_0 - y_0| + \int_0^t \left|[f(x(s)) - f(y(s))]\right| ds$$

$$v(t) = |x(t) - y(t)|$$

$$v(t) = v(0) + L\int_0^t v(s) \, ds$$

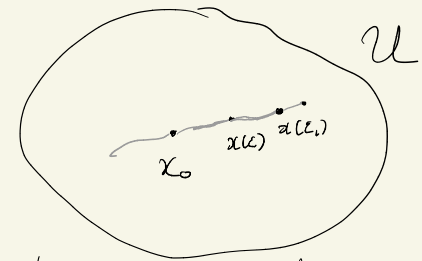
Gronwall

$$v(t) \leq v(0)\, e^{Lt}$$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0|\, e^{Lt}$$

Si $x_0 = y_0$ entonces $x(t) = y(t)$ $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

Por continuidad si las funciones son iguales en $[-\varepsilon, \varepsilon]$ entonces $x(\varepsilon) = y(\varepsilon)$



Este proceso lo podemos continuar hasta que la función deje de satisfacer las hipótesis del teorema (7 tarea) hasta que la función deja de ser Lipschitz.

El intervalo máximo donde podemos construir esta solución se llama "Intervalo Maximal de Existencia".

Nota del teorema

Si el campo vectorial $f \in \mathcal{C}^r$ (tiene r derivadas continuas)

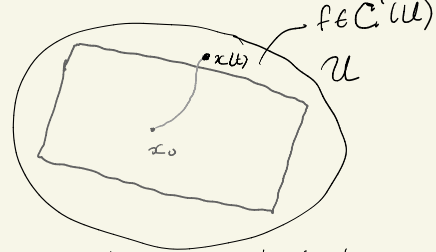
$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$
$$x(0) = x_0$$

$$\Rightarrow x \in C^{r+1}$$

C. Chicone,
J. Hale.
L. Perko.

Teorema (Extensión de soluciones)

Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ y $J \subseteq \mathbb{R}$ abiertos tales que $(\alpha, \beta) \subset J$, $x_0 \subset \mathcal{U}$. Si $f: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ es C^1 y el intervalo maximal de existencia es $\alpha < t < \beta < \infty$, entonces para cualquier $K \subset \mathcal{U}$, existe una $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $x(t) \notin K$.



En particular, $|x(t)|$ se va a infinito ó $x(t)$ se aproxima a la frontera de $\mathcal{U}$ cuando $t \to \alpha$ ó β.

(Se conoce como Lema del escape).