Programa de "Mecánica Racional"

1- escribir la ecuación de Newton.
i.e. encontrar (por argumentos experimentales, matemáticos, físicos, etc...) la fuerza.

2. resolver la ecuación de Newton:
ec. diferencial ordinaria

3.- Comparar la solución con los fenómenos estudiados.

Ecs. Diferenciales Ordinarias.

$$\ddot{z} = \tilde{F}(z, \dot{z}, t), \quad z: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

ec. dif ordinaria de segundo orden.

Ej 3

$$z = (\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{\text{Planeta A}}, \underbrace{y_1, y_2, y_3}_{\text{Planeta B}})$$

z: posición de todas las partículas.

$\dot{z}$: velocidad de todas las partículas.

podemos escribir $\ddot{z} = \tilde{F}(z, \dot{z}, t)$ como un sistema de primer orden.

$w = \dot{z}$ ("velocidad"), $w: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{z} = w \\ \dot{w} = \tilde{F}(z, w, t) \end{array}\right\} \text{ Sistema de } 2n \text{ ecuaciones diferenciales.}$$

$$y = (z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$\dot{y} = h(y, t)$$

Autónomo vs. No autónomo

Si $h(y,t) = h(y)$; sistema autónomo

Si h depende de t : sistema no-autónomo

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y} = h(y,t) \\ \dot{t} = 1 \end{array}\right\} \text{ sistema no-autónomo de dimensión } 2n+1$$

$\frac{dt}{dt} = 1$ $\quad x = (y, t)$ $\quad \dot{x} = h(x)$

Existencia local

Teoremas

P.V.I. $\dot{x} = h(x)$, en $\mathbb{R}^m$
$x(0) = x_0$

h satisface condiciones de regularidad en $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ abierto $\ni x_0$ $\Rightarrow$ existe una única solución $x : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^m$ tal que

1) x satisface ec. dif. $\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$
2) $x(0) = x_0$

i.e. existencia local + unicidad en el intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Teorema I

h es Lipschitz en $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$ abierto $\ni x_0$
$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ y una única $x : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^m$ t.q.
$x \in C^1$ (tiene una derivada continua) en $[-\varepsilon, \varepsilon]$ y satisface la ec. + cond. inicial.

Def
h es Lipschitz en $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ si $\exists\, L \geq 0$ tal que

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|,$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{U}$

L: const. de Lipschitz. (no depende de x_1, x_2)

Notar

h Lip $\Rightarrow$ h continua.
h dif $\Rightarrow$ h Lipschitz.