

Temas Selectos de Ecuaciones Diferenciales
Espacios de Sobolev y Ecuaciones Diferenciales
Parciales de Tipo Elíptico
Semestre 2024-2

Tarea 2: Espacios de Sobolev

1. Usa la transformada de Fourier para demostrar que si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s > \frac{n}{2}$ entonces $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)},$$

donde $C = C(n, s) > 0$ es una constante independiente de u .

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$, $n \geq 2$. Sean $1 \leq p < n$, $1 \leq q < n$ y defínase

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}.$$

Demuestra que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $v \in W^{1,q}(\Omega)$ entonces $uv \in W^{1,s}(\Omega)$. (*Sugerencia:* Aplica el teorema de encaje de Sobolev visto en clase y aplica la desigualdad de Hölder con \tilde{p} y \tilde{q} escogidos apropiadamente.)

3. Suponiendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$, integra por partes para demostrar la siguiente desigualdad de interpolación:

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2},$$

para toda $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. (*Sugerencia:* demuestra la desigualdad para $u \in C_0^\infty(\Omega)$ y aplica un argumento de densidad: existe una sucesión $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ que converge a u en $H_0^1(\Omega)$, y otra sucesión $\psi_j \in C^\infty(\bar{\Omega})$, que converge a u en $H^2(\Omega)$.)

4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$. Demuestra que no existe un operador lineal y acotado, $\gamma_0 : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$, tal que $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ cuando $u \in C(\bar{\Omega}) \cap L^p(\Omega)$. Es decir, una función en $L^p(\Omega)$ no tiene, en general, traza en $\partial\Omega$.

5. Encuentra un elemento en el espacio $W^{1,n}(\Omega)$ que no esté en $L^\infty(\Omega)$. (*Sugerencia:* considera $n = 2$, $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ y $u = \log \log(2/|x|)$. Demuestra que $u \in W^{1,n}(\Omega) = H^1(B_{1/2}(0))$.)

6. Sea $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$, es decir, $B_{1/2}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1/2\}$. Sea

$$u(x) := (-\log|x|)^a, \quad x \neq 0,$$

con $0 < a < 1/2$. Demuestra que $u \in H^1(B_{1/2}(0))$, pero que u no es acotada en una vecindad del origen.

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y *conexo* con $\partial\Omega \in C^1$. Aplica el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov para demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}^2 \leq C \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|<k} \left(\int_{\Omega} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} u(x) dx \right)^2 \right),$$

para toda $u \in H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$.

(b) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx + \int_{\Gamma} (\gamma_0 u)^2 dS_x \right),$$

para toda $u \in H^2(\Omega)$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza, y $\Gamma \subset \partial\Omega$ es una porción de la frontera que tiene superficie positiva $|\Gamma| > 0$, y que **no** es un pedazo de hiperplano.

(c) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|_{H^3(\Omega)}^2 \leq C \left(\sum_{|\alpha|=3} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 dS_x \right),$$

para toda $u \in H^3(\Omega)$ siempre que Ω **no sea un elipsoide**. Analiza el contraejemplo $u(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ para el caso del disco unitario (caso particular de un elipsoide) en \mathbb{R}^2 .

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con frontera $\partial\Omega \in C^1$ y orientable. Sea $\Gamma \subset \partial\Omega$ una porción de la frontera con superficie positiva,

$$|\Gamma| = \int_{\Gamma} dS_x > 0.$$

Demuestra que, para cada $g \in L^2(\Gamma)$, el mapeo

$$u \mapsto \int_{\Gamma} g(x)(\gamma_0 u)(x) dS_x, \quad u \in H^1(\Omega),$$

define un elemento del dual $H^{-1}(\Omega)$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza.

Total: 80 pts.