DESIGUALDADES DE MORREY Y DE GAGLIARDO-NIRENBERG-SOBOLEV

TEMAS SELECTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

03/05/2024

RAMÓN G. PLAZA

1. Motivación

Nos interesa discernir cuándo un espacio de Sobolev está contenido en otros espacios de funciones. En esta sección vamos a demostrar desigualdades de tipo Sobolev (véase, por ejemplo, el teorema de encaje de Sobolev visto en clase para el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$) las cuales nos permiten, por densidad, establecer las inclusiones (o encajes) de forma secuencialmente continua.

Por ejemplo, sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto y $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. ¿Pertenece u a otro espacio de Sobolev $W^{1,q}(\Omega)$, para cierto q? La respuesta depende de los casos siguientes:

(I) $1 \leq p < n$,
(II) $p = n$,
(III) $n < p < \infty$.

Supongamos, por el momento, que $1 \leq p < n$ (caso (I)) y consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n$. Nos preguntamos si una desigualdad del estilo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

con $C > 0$, constante independiente de u, es cierta. Primero observamos que q no puede ser arbitrario en ese caso.

Proposición 1.1. *Si* (1) *es cierta entonces, necesariamente,*

$$1 - \frac{n}{p} - \frac{n}{q} = 0. \tag{2}$$

Demostración. Suponiendo que (1) se cumple, tomemos $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y no idénticamente cero. Entonces para cada $\lambda > 0$ definimos el siguiente escalamiento,

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Haciendo un cambio de variables en la integral obtenemos

$$\|u_\lambda\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \, dx = \lambda^{-n}\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Análogamente

$$\|Du_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda x)|^p \, dx = \lambda^{p-n}\|Du\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dado que $u_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, sustituyendo en la desigualdad (1) obtenemos

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{1-n/p-n/q}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Notamos que si $\rho := 1 - n/p - n/q \neq 0$ entonces podemos llegar fácilmente a una contradicción tomando $\lambda \to \infty$ o $\lambda \to 0^+$. Por ejemplo, si $\rho > 0$ entonces

$$\|Du\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{\lambda^{-\rho}}{C} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to \infty,$$

si $\lambda \to 0^+$, lo cual es incompatible con $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Similarmente, llegamos a una contradicción en el caso $\rho < 0$ tomando el límite cuando $\lambda \to \infty$. Así, concluimos que si (1) es cierta entonces $\rho = 0$. □

Esta observación motiva la siguiente definición.

Definición 1.2. *Si* $1 \leq p < n$ *entonces el* exponente crítico de Sobolev de p *se define como*

$$p^* := \frac{np}{n-p}. \tag{3}$$

Claramente, el exponente crítico de Sobolev satisface la condición necesaria (2) con $q = p^*$. Vamos a demostrar que, en efecto, la desigualdad del tipo (1) se cumple para cualquier función de prueba.

1.1. Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Teorema 1.3 (desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$)**.** *Sea* $1 \leq p < n$. *Entonces existe una constante* $C = C(p, n) > 0$ *(independiente de* u*) tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{4}$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observación 1.4. *La hipótesis del soporte compacto de la función es indispensable: la función* $u \equiv 1 \in C^\infty$ *viola la desigualdad* (4)*, evidentemente. Sin embargo, es importante señalar que la constante* $C = C(n, p)$ *es independiente de* u *y, por lo tanto, de su soporte.*

Demostración del teorema 1.3. Comenzamos con el caso $p = 1$. Si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces para cada $1 \leq j \leq n$ tenemos que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_n)\, dy.$$

Por lo tanto,

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)|\, dy_j,$$

lo cual implica, a su vez, que

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{j=1}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)|\, dy_j \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integrando en $-\infty < x_1 < \infty$ obtenemos,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n)|\, dy_j \right]^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du(y_1, \dots, x_n)|\, dy_1 \right]^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=2}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_j, \dots, x_n)|\, dy_j \right]^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1 \right]^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=2}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_j, \dots, x_n)|\, dy_j \right]^{\frac{1}{n-1}}\, dx_1 .
\end{aligned} \tag{5}
$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y procediendo por inducción sobre $m \in \mathbb{N}$, es fácil demostrar que si $p_1^{-1} + \ldots + p_m^{-1} = 1$ y $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$, $1 \leq k \leq m$, Ω abierto, entonces

$$
\int_{\Omega} |u_1 \cdots u_m|\, dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.
$$

Así, aplicando esta desigualdad a las funciones

$$
\widetilde{u}_j := \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n)|\, dy_j \right]^{\frac{1}{n-1}} \geq 0,
$$

con $j = 2, \dots, n$ y $\Omega = \mathbb{R}$, podemos estimar

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}_2 \cdots \widetilde{u}_n\, dx_1 \leq \prod_{j=2}^{n} \|\widetilde{u}_j\|_{L^{p_j}(-\infty < x_1 < \infty)} &= \prod_{j=2}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{u}_j|^{p_j}\, dx_1 \right]^{1/p_j} \\
&= \prod_{j=2}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n)|\, dy_j \right]^{p_j/(n-1)} dx_1 \right]^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \left[\prod_{j=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_j, \dots, x_n)|\, dx_1\, dy_j \right]^{\frac{1}{n-1}},
\end{aligned}
$$

donde $p_j \equiv n-1$ para $j = 2, \dots, n$, $p_2^{-1} + \ldots + p_n^{n-1} = 1$ y $\widetilde{u}_j \in L^{p_j}$. Sustituyendo esta desigualdad en (5) se obtiene

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1 \right]^{\frac{1}{n-1}} \left[\prod_{j=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_j, \dots, x_n)|\, dx_1\, dy_j \right]^{\frac{1}{n-1}}. \tag{6}
$$

Integrando la desigualdad (6) en $-\infty < x_2 < \infty$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1\, dx_2 \\
&\qquad \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1\right]^{\frac{1}{n-1}} \left[\prod_{j=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1,\ldots,y_j,\ldots,x_n)|\, dx_1\, dy_j\right]^{\frac{1}{n-1}} \right) dx_2 \\
&\qquad \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1\, dy_2\right]^{\frac{1}{n-1}} \times \\
&\qquad\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1\right]^{\frac{1}{n-1}} \left[\prod_{j=3}^{n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1,\ldots,y_j,\ldots,x_n)|\, dx_1\, dy_j\right]^{\frac{1}{n-1}} dx_2 \\
&\qquad = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1\, dy_2\right]^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} I_j^{\frac{1}{n-1}}\, dx_2,
\end{aligned}
$$

donde

$$
I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1, \qquad I_j := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1\, dy_j, \quad j = 3,\ldots,n.
$$

Aplicando nuevamente la desigualdad de Hölder al producto con $j \geq 3$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1\, dx_2 \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1\, dy_2\right]^{\frac{1}{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1\, dx_2\right]^{\frac{1}{n-1}} \times \\
\times \prod_{j=3}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1\, dy_j\, dx_2\right]^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Procediendo recursivamente e integrando con respecto a $x_3, x_4, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ se puede demostrar por inducción que

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \leq \prod_{j=1}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx_1 \, \ldots dy_j \, \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{n-1}} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |Du|\, dx\right]^{\frac{n}{n-1}}.
$$

Nótese que esta desigualdad es precisamente la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (4) en el caso $p = 1$, en virtud de que $1^* = n/(n-1)$. Observamos también que la constante involucrada en (4) es $C = C(n,1) \equiv 1$ (en el caso $p = 1$).

Consideremos ahora el caso $1 < p < n$. Aplicamos la desigualdad en el caso $p = 1$, es decir,

$$
\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),
$$

a la función $v := u^\theta$ con $\theta > 1$ para cualquier $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. El resultado es

$$
\left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\theta n}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D(u^\theta)|\, dx.
$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con $q = p/(p-1)$ obtenemos

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\theta n}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}} \leq \theta \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\theta-1}|Du|\,dx \leq \theta \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{(\theta-1)p}{p-1}}\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\,dx\right]^{1/p}.$$

Escogiendo

$$\theta := \frac{p(n-1)}{n-p} > 1,$$

reconocemos que

$$p^* = \frac{\theta n}{n-1} = \frac{(\theta-1)p}{p-1},$$

y por lo tanto,

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\,dx\right]^{1/p^*} \leq \theta \left[\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\,dx\right]^{1/p},$$

es decir, obtenemos la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (4) con constante $C(n,p) = p(n-1)/(n-p) > 0$ para el caso $1 < p < n$. El teorema está demostrado. $\square$

Teorema 1.5 (desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev en $W^{1,p}(\Omega)$)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y con frontera de clase C^1. Sean $1 \leq p < n$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \tag{7}$$

para cierta constante $C = C(\Omega, p, n) > 0$, independiente de u y donde $p^* = np/(n-p)$. En particular, tenemos el siguiente encaje secuencialmente continuo,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Demostración. Dado que Ω es acotado y $\partial\Omega \in C^1$, por el teorema de extensión (visto en clase) para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existe $\bar{u} := \mathcal{E}u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que:

- $u = \bar{u}$ c.d.s. en Ω,
- $\bar{u}$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^n$,
- $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Dado que $\bar{u}$ tiene soporte compacto, podemos aplicar el teorema de aproximación local (visto en clase) y deducir la existencia de una sucesión $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, tal que $u_m \to \bar{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Aplicando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev a elementos de la sucesión (teorema 1.3) notamos que

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

para $l, m \to \infty$. Por lo tanto, la sucesión u_m es de Cauchy en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ y deducimos la existencia de $\widetilde{u} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to \widetilde{u}$ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ si $m \to \infty$. Por unicidad del límite

$$u_m \to \bar{u}, \qquad \text{en} \quad L^{p^*}(\mathbb{R}^n), \ \ m \to \infty.$$

De este modo, por la desigualdad (4) para elementos de C_0^∞, obtenemos

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leftarrow \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to C\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

cuando $m \to \infty$. Así, dado que $\bar{u} = u$ c.d.s. en Ω y por el teorema de extensión, obtenemos

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

que es lo que se quería demostrar. $\square$

Observación 1.6. *Si* $1 \leq p < n$ *entonces* $p^* = np/(n-p) \to \infty$ *cuando* $p \to n^-$. *Por la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev* (7) *podríamos esperar que* $u \in L^\infty(\Omega)$ *siempre que* $u \in W^{1,n}(\Omega)$. *Esto es falso. Como contraejemplo, tomemos* $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ *y*

$$u(x) = \log\log\Big(\frac{2}{|x|}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Claramente $u \notin L^\infty(B_{1/2}(0))$ *ya que* $u(x) \to \infty$ *si* $x \to 0$. *Sin embargo,* $u \in H^1(B_{1/2}(0))$ *(ejercicio).*

1.2. Desigualdad de Morrey. A continuación analizaremos el caso (III), $n < p < \infty$. Vamos a demostrar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces u coincide c.d.s. con una función Hölder continua para un cierto exponente de Hölder γ apropiado. Para ello, primero demostraremos la siguiente desigualdad, conocida como la desigualdad de Morrey, para funciones en $C^1(\mathbb{R}^n)$

Teorema 1.7 (desigualdad de Morrey en $C^1(\mathbb{R}^n)$)**.** *Sea* $n < p < \infty$. *Entonces existe una constante* $C = C(n,p) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{8}$$

para todo $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, *donde*

$$\gamma := 1 - \frac{n}{p} > 0.$$

Demostración. Sea $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ para cierto $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$. Probaremos que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} |u(x) - u(y)|\, dy \leq C \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy, \tag{9}$$

para todo $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Sea $z \in \partial B_1(0)$. Entonces, para cada $0 < s < r$ tenemos que

$$|u(x+sz) - u(x)| = \left|\int_0^s \frac{d}{dt} u(x+tz)\, dt\right| = \left|\int_0^s Du(x+tz)\cdot z\, dt\right| \leq \int_0^s |Du(x+tz)|\, dt.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sz) - u(x)|\, dS_z &\leq \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} t^{n-1}|Du(x+tz)|\, \frac{dS_z}{t^{n-1}} \\
&= \int_0^s \int_{\partial B_t(x)} \frac{|Du(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dS_y\, dt \\
&= \int_{B_s(x)} \frac{|Du(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy \\
&\leq \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy,
\end{aligned}$$

tras haber realizado el cambio de variables $y = x + tz$ y en vista de que $B_s(x) \subset B_r(x)$. Multiplicando por s^{n-1} e integrando en $s \in (0,r)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^r s^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} |u(x+sz) - u(x)|\, dS_z\, ds &= \int_{B_r(x)} |u(x) - u(y)|\, dy \\
&\leq \frac{r^n}{n} \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy,
\end{aligned}$$

lo cual implica la desigualdad (9) con $C = r^n/(n|B_r|)$.

Ahora, sea $x \in \mathbb{R}^n$, fijo. Aplicando la desigualdad (9) y la desigualdad de Hölder con $p^{-1} + q^{-1} = 1$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} |u(x) - u(y)|\,dy + \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} |u(y)|\,dy \\
&\leq C\int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \;+\; \frac{1}{|B_r|}\left(\int_{B_r(x)} |u(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\left(\int_{B_r(x)} dy\right)^{1/q} \\
&= C\int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \;+\; |B_r|^{-1+1/q}\|u\|_{L^p(B_r(x))}.
\end{aligned}$$

Escogiendo $r = 1$ y aplicando nuevamente la desigualdad de Hölder con $p^{-1}+q^{-1} = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq C\int_{B_1(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \;+\; |B_1|^{-1+1/q}\|u\|_{L^p(B_1(x))} \\
&\leq C\left(\int_{B_1(x)} |Du(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\left(\int_{B_1(x)} \frac{dy}{|x-y|^{(n-1)q}}\right)^{1/q} \;+\; |B_1|^{-1+1/q}\|u\|_{L^p(B_1(x))} \\
&\leq C(n,p)\Big(\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big),
\end{aligned}$$

donde hemos reconocido que la integral

$$\int_{B_1(x)} \frac{dy}{|x-y|^{(n-1)q}} = \int_{B_1(x)} \frac{dy}{|x-y|^{(n-1)p/(p-1)}} < \infty,$$

existe, en virtud de que $(n-1)p/(p-1) < n$ siempre que $p > n$. Como $x \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, obtenemos

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)| \leq C(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}$$

Finalmente, consideremos $x, y \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios, tales que $x \neq y$. Sea $r := |x - y| > 0$. Definimos el conjunto $\check{B} := B_r(x) \cap B_r(y)$. Por lo tanto,

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{1}{|\check{B}|}\int_{\check{B}} |u(x) - u(z)|\,dz + \frac{1}{|\check{B}|}\int_{\check{B}} |u(y) - u(z)|\,dz.$$

Aplicando las desigualdades (9) y de Hölder, tenemos la estimación

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\check{B}|}\int_{\check{B}} |u(x) - u(z)|\,dz &\leq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} |u(x) - u(z)|\,dz \leq C\int_{B_r(x)} \frac{|Du(z)|}{|x-z|^{n-1}}\,dz \\
&\leq C\left(\int_{B_r(x)} |Du(z)|^p\,dz\right)^{1/p}\left(\int_{B_r(x)} \frac{dz}{|x-z|^{(n-1)p/(p-1)}}\right)^{(p-1)/p}.
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x)} \frac{dz}{|x-z|^{(n-1)p/(p-1)}} &= \int_{B_r(0)} \frac{d\xi}{|\xi|^{(n-1)p/(p-1)}} = \int_0^r \int_{|\xi|=\rho} \frac{dS_\xi}{\rho^{(n-1)p/(p-1)}}\,d\rho \\
&= |\partial B_1|\int_0^r \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{(n-1)p/(p-1)}}\,d\rho \\
&= Cr^{(p-n)/(p-1)}.
\end{aligned}$$

□

Definición 1.8. *Decimos que una función medible, $u_* : \Omega \to \mathbb{R}$, es una* versión *de otra función medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si $u = u_*$* c.d.s. *en Ω.*

Teorema 1.9 (desigualdad de Morrey en $W^{1,p}(\Omega)$)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Sean $n < p \leq \infty$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces existe una versión $u_* \in C^{0,\gamma}(\Omega)$ de u con $\gamma = 1 - n/p$ que satisface*

$$\|u_*\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \tag{11}$$

para cierta constante $= C(p, n, \Omega) > 0$ independiente de u.

Demostración. Dado que $\partial\Omega \in C^1$, por el teorema de extensión existe $\bar{u} := \mathcal{E}u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que:

- $u = \bar{u}$ c.d.s. en Ω,
- $\bar{u}$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^n$,
- $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Supogamos, primero, que $n < p < \infty$. Dado que $\bar{u}$ tiene soporte compacto, por densidad existe una sucesión $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to \bar{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Por el teorema 1.7 tenemos que

$$\|u_m - u_\ell\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_\ell\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

con $\gamma = 1 - n/p$ si $m, \ell \to \infty$. Es decir, u_m es una sucesión de Cauchy en $C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$, espacio completo. Entonces deducimos que existe $u_* \in C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u_*$ en $C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$ cuando $m \to \infty$.

Para verificar que $u_* = \bar{u}$ c.d.s. en $\mathbb{R}^n$ observamos que $\bar{u}$ tiene soporte compacto y $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $u_m \to \bar{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Entonces podemos escoger una subsucesión u_m tal que $\operatorname{supp}(u_m), \operatorname{supp}(\bar{u}) \subset K$ con K compacto. Así tenemos que

$$\begin{aligned} |u_*(x) - \bar{u}(x)| &\leq |u_*(x) - u_m(x)| + |u_m(x) - \bar{u}(x)| \\ &\leq \|u_* - u_m\|_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} + \fint_K |u_m - \bar{u}|\, dx \end{aligned}$$

Estimando la última integral se tiene, con $p^{-1} + q^{-1} = 1$, que

$$\begin{aligned} \fint_K |u_m - \bar{u}|\, dx &\leq \frac{1}{|K|} \left[\int_K |u_m - \bar{u}|^p\, dx \right]^{1/p} \left[\int_K dx \right]^{1/q} \\ &\leq |K|^{1/q-1} \|u_m - \bar{u}\|_{L^p(K)} \\ &= |K|^{-1/p} \|u_m - \bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &= C(\Omega)\|u_m - \bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u_*(x) - \bar{u}(x)| \leq \|u_* - u_m\|_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} + C\|u_m - \bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

si $m \to \infty$. Esto implica que $u = u_*$ c.d.s. en $\mathbb{R}^n$; en particular, $u_* = u$ c.d.s. en Ω. De este modo,

$$\|u_m\|_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Omega)\|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)};$$

tomando el límite cuando $m \to \infty$ se tiene que

$$\|u_*\|_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Omega)\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \bar{C}(\Omega, n, p)\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

es decir, obtenemos (11). El caso $p = \infty$ se deja al lector como ejercicio. $\square$

Observación 1.10. *Dado que* $u = u_*$ c.d.s. *a partir de este momento no distinguiremos entre las distintas versiones de* u*. El teorema 1.9 es importante porque implica que si* $p > n$ *entonces toda función en* $W^{1,p}(\Omega)$ *es continua (más precisamente, tiene una versión Hölder continua con exponente* $\gamma = 1 - n/p$*).*

Observación 1.11. *Obsérvese que, por definición de la norma* $\| \cdot \|_{C^{0,1-n/p}}$*, se tiene también la estimación*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{C^{0,1-n/p}(\overline{\Omega})}.$$

En consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.12. *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *es abierto, acotado, con* $\partial\Omega \in C^1$ *entonces en el caso* $p > n$ *la inclusión* $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ *es secuencialmente continua con*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *y con* $C > 0$ *independiente de* u*.*

Referencias

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, C.P. 04510 Cd. de México (México)

Email address: `plaza@aries.iimas.unam.mx`