Álgebra Lineal I
Tarea 6

1. Calcula $\det A$ en los siguientes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Demuestra que:

(a) $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ es invertible si y sólo si $A^\top A$ es invertible.

(b) Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es anti-simétrica, es decir, $A^\top = -A$, entonces $\det A = (-1)^n \det A$. ¿Qué pasa si n es impar?

(c) Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es anti-simétrica entonces

$$\det(A - I_n) = \begin{cases} > 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ < 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

3. Sean $u, v \in \mathbb{F}^n$ tales que $v^*u \neq 1$. Demuestra que

$$\det(I_n - uv^*) = 1 - v^*u.$$

Sugerencia: Observa que

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -v^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n - uv^* & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ v^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & u \\ 0 & 1 - v^*u \end{bmatrix}.$$

4. *Sin* calcular el determinante, demuestra que

$$\det \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\delta+\alpha) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{bmatrix} = 0.$$

5. Para cada una de la siguientes matrices A, calcula $\det A$. Si $\det A \neq 0$ entonces calcula también la inversa, $A^{-1} = (\det A)^{-1}\mathrm{adj}(A)$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

6. ¿Cierto o falso? Determina si los siguientes enunciados son ciertos o falsos y justifica tu respuesta: en el primer caso, demuestra el enunciado; en el segundo, da un contraejemplo.

(a) Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ y $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ se obtiene multiplicando cada renglón de A por el número de renglón (es decir, si $[B]_{ij} := i[A]_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$) entonces

$$\det B = \frac{n(n+1)}{2} \det A.$$

(b) $\det \begin{bmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix} = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, para cualesquiera $a_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ son tales que $\det A = \det B$ entonces $\det(A + B) = 2\det A$.

(d) Si los elementos de cada renglón de una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ suman cero (es decir, si $\sum_{j=1}^{n}[A]_{ij} = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$) entonces $\det A = 0$.

(e) Si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ entonces $\det(\operatorname{adj}(A)) = (\det A)^n$.

7. Aplica la regla de Cramer para encontrar la solución a los siguientes sistemas de la forma $Ax = b$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$.

8. Sea $v_1, \dots, v_n$ una colección arbitraria de vectores en $\mathbb{R}^n$. Para cada $1 \leq k \leq n$, sea M_k la matriz de $k \times k$ cuya entrada (i,j) es $[M_k]_{i,j} = v_i^\top v_j$, para cada $1 \leq i, j \leq k$. Si w_n es la proyección ortogonal de v_n sobre el complemento ortogonal de $\mathcal{S}_{n-1} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$, es decir, $w_n = v_n - \operatorname{proj}_{\mathcal{S}_{n-1}}(v_n)$, demuestra que

$$\det M_n = \|w_n\|^2 \det M_{n-1}.$$

9. Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(a) Demuestra que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A + suv^\top) = a + sb$, para cualquier $s \in \mathbb{R}$.

(b) Demuestra que si $\det A \neq 0$ entonces podemos escoger $a = \det A$ y $b = (\det A)(v^\top A^{-1}u)$.

Sugerencia: Observa que la matriz

$$B = uv^\top = \begin{bmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & \cdots & u_nv_n \end{bmatrix}$$

es singular.

10. Suponiendo que x es la solución del sistema $Ax = b$ donde A es una matriz invertible. Suponiendo que b se midió en un experimento y que está sujeto a errores de magnitud ϵ en su i-ésima componente, se quiere conocer el efecto que tiene en la exactitud de x. Para tal efecto, supongamos que b cambia a $b' = b + \epsilon\hat{e}_i$.

(a) Demuestra que x cambia en $\epsilon A^{-1}\hat{e}_i$.

(b) Usa la regla de Cramer para encontrar una expresión en términos de ϵ y de determinantes para el cambio de la j-ésima entrada de x, donde $1 \leq j \leq n$.

Total: 10 pts.