Álgebra Lineal I
Tarea 5

1. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno definido sobre un campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\| \cdot \|$ es la norma inducida por dicho producto interno, $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Demuestra, para cualesquiera $u, v \in V$:

(a) la desigualdad del triángulo:
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|;$$

(b) la identidad del paralelogramo:
$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big);$$

(c) la desigualdad de polarización en el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:
$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\big(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\big);$$

(d) la desigualdad de polarización en el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:
$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\big(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u - iv\|^2 - i\|u + iv\|^2\big).$$

2. Sean W_1, W_2 subespacios vectoriales de V, espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Demuestra que:

(a) Si $W_1 \subset W_2$ entonces $W_2^\perp \subset W_1^\perp$.

(b) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

(c) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

3. Encuentra una base ortonormal de $W^\perp \subset \mathbb{R}^4$ donde
$$W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

4. Sean $u, v \in \mathbb{R}^4$, dados por:
$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determina la proyección ortogonal de u sobre span $\{v\}$.

(b) Determina la proyección ortogonal de v sobre span $\{u\}$.

(c) Determina la proyección ortogonal de u sobre $\operatorname{span}\{v\}^{\perp}$.

(d) Determina la proyección ortogonal de v sobre $\operatorname{span}\{u\}^{\perp}$.

5. Sea V el espacio vectorial $C([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Sea $W = \operatorname{span}(S) \subset V$ donde $S = \{\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x)\}$.

(a) Demuestra que S es un conjunto ortonormal.

(b) Calcula $\|x\|$.

(c) Calcula $\operatorname{proj}_W(\cos(3x))$.

(d) Calcula $\operatorname{proj}_W(x)$.

6. (a) Sea $W \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio

$$W = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

Encuentra $w \in W$ tal que minimice $\|w - v\|$ con $v = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$.

(b) Encuentra el polinomio $u(x) \in \mathbb{R}[x;3]$ tal que $u(0) = 0$, $(du/dx)(0) = 0$ y que minimice

$$\int_0^1 (2 + 3x - u(x))^2\,dx.$$

7. Sean $u \in \mathbb{C}^n$ con $\|u\| = 1$ y $Q = I_n - uu^* \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Demuestra que:

(a) Q *no* es invertible.

(b) $\dim \mathcal{R}(Q) = n - 1$.

8. Sean

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

(a) Determina la factorización QR de A.

(b) Usando (a) encuentra la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$.

9. (a) Aplicando la reducción de Householder encuentra una base ortonormal de $\mathcal{R}(A) \subset \mathbb{R}^4$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & -14 & -3 \\ -2 & 14 & 0 \\ 1 & -7 & 15 \end{bmatrix}$$

(b) Calcula la solución de mínimos cuadrados del problema $Ax = b$, donde

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ -15 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

10. Calcula las matrices de Householder H_{u_1}, H_{u_2} que transforman la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix},$$

en una triangular superior (es decir, $H_{u_1} H_{u_2} A = R$ donde R es triangular superior).

Total: 10 pts.