Álgebra Lineal I
Tarea 4

1. ¿Cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \, : \, x_j \in \mathbb{R}, \; 1 \leq j \leq n\}$ son subespacios vectoriales? Explica tus respuestas.

(a) Todos los vectores x tales que $x_1 \geq 0$.

(b) Todos los vectores x tales que $x_1 + x_2 = 0$.

(c) Todos los vectores x tales que $x_1 + x_2 + 1 = 0$.

(d) Todos los vectores x tales que $x_1 = 0$.

(e) Todos los vectores x tales que x_1 es un número entero.

2. Sea $C(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determina cuales de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $C(\mathbb{R})$. Explica tus respuestas.

(a) El subconjunto de polinomios de cualquier orden en $C(\mathbb{R})$.

(b) El subconjunto de funciones $f \in C(\mathbb{R})$ tales que $f(1)$ es un número racional.

(c) El subconjunto de funciones $f \in C(\mathbb{R})$ tales que $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$.

(d) El subconjunto de funciones $f \in C(\mathbb{R})$ tales que $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

(e) El subconjunto de funciones derivables en $C(\mathbb{R})$ tales que $df/dx = 0$.

3. Demuestra que el subconjunto de funciones $f \in C(\mathbb{R})$ tales que son derivables y además $df/dx = 0$ es un subespacio vectorial de $C(\mathbb{R})$ de dimensión igual a uno. Generaliza el resultado. Por ejemplo, ¿cuál es la dimensión del espacio de funciones dos veces derivables tales que $d^2 f/dx^2 = 0$?

4. (a) Determina si el vector $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ pertenece al span de $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, donde $v_1 = (1, 3, 4)$, $v_2 = (4, 0, 1)$, $v_3 = (3, 1, 2)$.

(b) Determina si el vector $(2, 0, -4, -2) \in \mathbb{R}^4$ pertenece al span de $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, donde $v_1 = (0, 2, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1, 0)$, $v_3 = (2, 1, 0, -2)$.

5. Sea $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ el conjunto de matrices de $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$, con entradas en el campo $\mathbb{F}$. Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) \, : \, A^\top = A\}, \\ \text{y} \quad \mathcal{A} &:= \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) \, : \, A^\top = -A\}, \end{aligned}$$

los subconjuntos de las matrices simétricas y anti-simétricas en $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$, respectivamente. Demuestra que:

(a) $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ es un espacio vectorial de dimensión n^2.

(b) $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. ¿Cuál es su dimensión?

(c) $\mathcal{A}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. ¿Cuál es su dimensión?

(d) $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

6. (a) Sea V un espacio vectorial. Sea $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$, con $m \in \mathbb{N}$, un conjunto linealmente independiente. Demuestra que el conjunto

$$\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{m-1} - v_m, v_m\}$$

también es linealmente independiente.

(b) Suponiendo que $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, demuestra que si $w \in V$ es tal que el conjunto $\{v_1 + w, \ldots, v_m + w\}$ es linealmente dependiente, entonces $w \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$.

7. Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^5$ el subespacio vectorial definido como

$$\mathcal{U} = \{(x_i, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,:\, x_1 = 3x_2,\ x_3 = 7x_4\}.$$

Encuentra una base de $\mathcal{U}$ y justifica tu respuesta.

8. Cierto o falso. Demuestra o da un contraejemplo de los siguientes enunciados:

(a) Si W, U_1, U_2 son subespacios de un espacio vectorial V tales que

$$U_1 + W = U_2 + W,$$

entonces $U_1 = U_2$.

(b) Si W, U_1, U_2 son subespacios de un espacio vectorial V tales que

$$V = U_1 \oplus W, \quad \text{y} \quad V = U_2 \oplus W,$$

entonces $U_1 = U_2$.

(c) Si U_1, U_2 son subespacios de un espacio vectorial V entonces $U_1 \cup U_2$ es un subespacio vectorial de V.

9. (a) Sean U y W dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ tales que $\dim U = \dim W = 2$. Prueba que $\dim(U \cap W) \geq 1$.

(b) Sean

$$\begin{aligned} v_1 &= (2, 1, 0, -1), & v_3 &= (1, -3, 2, 0), & v_5 &= (-2, 0, 6, 1), \\ v_2 &= (4, 8, -4, -3), & v_4 &= (1, 10, -6, -2), & v_6 &= (3, -1, 2, 4). \end{aligned}$$

Se definen los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \qquad W = \operatorname{span}\{v_4, v_5, v_6\}.$$

Encuentra $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U + W)$ y $\dim(U \cap W)$.

10. Sea W un subespacio de un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$. Para cualquier $v \in V$, el conjunto

$$\{v\} + W = \{v + w \,:\, w \in W\},$$

es llamado la *clase lateral* de W que contiene a v. Adoptaremos la notación $v + W := \{v\} + W$.

(a) Demuestra que $v + W$ es un subespacio vectorial de V si y sólo si $v \in W$.

(b) Demuestra que $v_1 + W = v_2 + W$ si y sólo si $v_1 - v_2 \in W$.

La adición y multiplicación por escalares en $\mathbb{F}$ se pueden definir en la colección $S = \{v+W \,:\, v \in V\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(v_1 + W) + (v_2 + W) &:= (v_1 + v_2) + W,\\ \alpha(v + W) &:= (\alpha v) + W,\end{aligned}$$

para cualesquiera $v, v_1, v_2 \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$.

(c) Demuestra que las operaciones precedentes están bien definidas en S, es decir, que si $v_1 + W = v_1' + W$ y $v_2 + W = v_2' + W$ entonces

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1' + W) + (v_2' + W), \quad \text{y,}$$

$$\alpha(v_1 + W) = \alpha(v_1' + W),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{F}$.

Total: 10 pts.