

Proyección cartográfica de Marte

Andrea Yolotzin Leonor Moreno

Primer semestre de Licenciatura en Matemáticas

Facultad de Ciencias, UNAM

Asesorada por Dr. Pablo Padilla Longoria

Departamento de Matemáticas y Mecánica

Índice

Proyección cartográfica de Marte

PREFACIO Y AGRADECIMIENTOS	3
INTRODUCCIÓN	5
ANTECEDENTES CARTOGRÁFICOS	8
HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS (UN VIAJE POR DIFERENTES GEOMETRÍAS)	19
MOTIVACIÓN DE USAR GEOMETRÍA ESFÉRICA	19
“CARTOGRAFIANDO” LA TIERRA. COORDENADAS GEOGRÁFICAS	21
COORDENADAS ESFÉRICAS	24
-DE COORDENADAS ESFÉRICAS A CARTESIANAS	24
COORDENADAS CILÍNDRICAS	24
-DE COORDENADAS CILÍNDRICAS A CARTESIANAS	24
CONVERSIÓN DE COORDENADAS CARTESIANAS EN LA ESFERA, A CARTESIANAS EN EL CILINDRO	25
PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA	25
-PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO EQUILÁTERO	26
-PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA DE UN CARDIOIDE	27
PROYECCIÓN CILÍNDRICA AXIAL	31
-PROYECCIÓN CILÍNDRICA AXIAL DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO EQUILÁTERO	34
-PROYECCIÓN CILÍNDRICA AXIAL DE UN CARDIOIDE	35
RESULTADOS	37
HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES	37
PROCESO DE ELABORACIÓN DEL MAPA	38
-DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS A ESFÉRICAS	38
-DE COORDENADAS ESFÉRICAS A CARTESIANAS	41
-COMPROBACIÓN DE LA DEDUCCIÓN DE LAS FUNCIONES ANTERIORES	41
-DE COORDENADAS CARTESIANAS EN MODELO DE MARTE, A COORDENADAS CARTESIANAS EN CILINDRO	41
-PROYECTANDO UN PUNTO DE MARTE	44
-PROYECTANDO EL VOLCÁN MÁS GRANDE DE MARTE	45
-PROYECCIÓN CILÍNDRICA AXIAL DE ACCIDENTES GEOGRÁFICOS DE MARTE	46
-MAPA DE MARTE. MAPA MARS 3202	51
CONCLUSIONES	52
REFERENCIAS	54
APÉNDICE	60

Prefacio y agradecimientos

Este texto es la recapitulación de la creación de un mapa de Marte, para el cual se aprendió y construyó geometría, así como se descubrió información útil sobre cartografía, sistemas de información geográfica, accidentes geográficos de Marte y bellas aplicaciones de las matemáticas. Entre mis intereses se ha encontrado desde hace 4 años la visualización y creación de mapas, generalmente de mi ciudad o por lo menos de mi planeta, y casi nunca con métodos matemáticos tan exactos y rigurosos, por ello cuando tuve la oportunidad de crear una proyección cartográfica de un planeta ajeno al que vivimos, no pude pensar ni siquiera en la complejidad del proyecto, sencillamente dije “Sí, quiero hacerlo” y sin peros comencé.

Pienso que este proyecto está destinado a aquellos que deseen ver una maravillosa aplicación de las geometrías, alguien que desee un manual de cómo hacer un mapa (justo como yo lo quise en su momento), alguien que quiera asombrarse con la cantidad de matemáticas que hay para elaborar cualquier proyección, y en resumen alguien que se quiera confirmar que el mundo es matemático. Deseo agradecer especialmente al Dr. Pablo Padilla, quien hizo posible este proyecto debido a su conocimiento e ingenio, gracias por todo lo aprendido, por tu paciencia, ¡Gracias por brindarme esta inolvidable oportunidad de ver de cerca tu mundo como investigador! Te admiro.

También deseo agradecer al programa *Jóvenes hacia la Investigación*, por coordinar experiencias como esta, ya que gracias a ello pude mirar qué es lo que realmente hace un matemático y esto es: ¡Resolver problemas!

Gracias a Rodolfo Rangel, por siempre haber estado para mí, por su gran actividad y pensamiento en este proyecto, por sus ideas. Gracias por todo el apoyo que me das, gracias por estar aquí, amor. ¡Muchas gracias también al Ing. Juan Carlos Sandoval Baleón, por compartir sus superpoderes matemáticos conmigo de nuevo, por sus sabios consejos, por su solución a problemas! ¡Gracias!

Y finalmente, gracias a mis padres, por creer siempre en mí, por estar aquí, por escucharme siempre, los amo.

Estimado lector ¡Disfruta este viaje por la geometría!

Andrea Yolotzin Leonor Moreno, Ciudad de México, 23 de Marzo de 2023.

El mundo es matemático

Introducción

El impresionante avance en la tecnología que ha mejorado las herramientas de la cartografía, y la aplicación de diferentes geometrías, trigonometría y matemáticas que forman la cartografía matemática, nos permiten hoy extender nuestro conocimiento y herramientas a otros planetas, dejándonos transformar superficies que aún no pisamos, en un plano que nos deja descubrir la mejor manera de llevar a cabo una misión interplanetaria. Un caso es el de nuestro planeta vecino Marte, el cual recibe especial atención porque le ofrece a la humanidad la esperanza de conservar la especie y de proporcionarnos materiales necesarios para la vida en el planeta, como el agua.

Marte es un planeta explorado también porque tiene rasgos geológicos parecidos al nuestro, como cráteres y redes fluviales, por ello se deduce que Marte almacenó agua en algún momento de su historia y por ende, posiblemente hubo vida en él. Aunque de algún modo esta vida desapareció, la pregunta que hoy se busca contestar es cómo surgió el agua en este planeta y cómo exactamente desapareció, convirtiéndolo hoy en una árida superficie con más de 15 volcanes nombrados hasta el momento. Una posible respuesta es que el agua marciana desapareció luego de que Marte perdiera su campo magnético, dejando que toda gota de agua se perdiera en el Universo, empero, no hay una certeza de esto.

Y así como esta pregunta, hay muchas más que siguen sin ser respondidas y que pueden ser explicadas con la exploración de este planeta rojo, ya que de este modo podríamos tomar muestras de su superficie para examinarlas y procesarlas, y después podríamos incluso conocer y explicar mejor la historia del Sistema Solar, ya que se compararían los fenómenos sucedidos en la Tierra con los de otro planeta o mejor aún, a partir de ahí se podría comenzar un proceso de terraformación en Marte para que las plantas terrestres puedan vivir ahí, y para lograr que el *Homo Sapiens Sapiens* y la vida como la conocemos hoy también pueda hacerlo. En cualquier caso, y como sea que

resulten las futuras investigaciones e intentos, no podemos salir de nuestra situación actual sin antes enviar astronautas o robots al planeta rojo, que guiados mediante los mejores mapas sean capaces de ir e investigar para avanzar en nuestro primer paso a recorrer el Sistema Solar.

La misión es compleja pero no necesariamente imposible, solo requerimos antes de todo saber que los pasos en el planeta rojo serán dados con una (o muchas) proyecciones cartográficas que muestren toda la historia, tecnología, herramientas y matemáticas que se han desarrollado estos últimos siglos en la Tierra.

Este proyecto genera una proyección cartográfica del planeta Marte, el cual nos permitirá a la humanidad en un futuro, tomar mejores decisiones respecto a las nuevas tripulaciones mandadas a Marte, con el fin de progresar tecnológicamente y científicamente.

Para ello, nos apoyaremos en diversas fuentes de información sobre Marte, como algunos sitios de internet de la Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio (o NASA, por sus siglas en inglés) donde de manera pública se encuentra la información y hologramas que la nave *Mars Odyssey* desde el 7 de abril de 2001 hasta hoy, ha recopilado.

También, nos ayudaremos del simulador línea Mars Trek, en el cual se puede explorar la superficie de Marte visualizando los polos magnéticos, zonas visibles y zonas oscuras (por la ausencia de luz del Sol), así como la localización de los satélites *Perseverance*, *Curiosity Rover*, y *Opportunity Rover*. *Explore Mars* específicamente nos ayudará con la obtención de distancias, áreas, medición de altura de la superficie marciana, y la comparación de algunas ciudades y montañas de la Tierra, en Marte.

Y por último, pero más importante aún, de un vasto y breve viaje por diversas geometrías, desde la geometría plana-euclídea en las proyecciones mismas, hasta una construcción formal y matemática del planeta Marte, utilizando geometría proyectiva, esférica, cilíndrica, en diferentes espacios, como el cartesiano en \mathbb{R}^3 y en \mathbb{R}^2 , plano polar, complejo, y geográfico.

Pretendo que con este proyecto se pueda observar que efectivamente *el mundo es matemático*, y que cada parte de nuestro mundo y del universo tiene una rama de las matemáticas lista para describirle.

Sin más, comencemos este viaje por las matemáticas que cartografían nuestro planeta.

Antecedentes cartográficos

Cartografía, del latín *charta*, que significa papel, y del griego *graphein*, que significa describir, es una técnica que se encarga de generar proyecciones del espacio como elipsoides, esferas y planetas en un plano de dos dimensiones.

El *modus operandi* de esta técnica no se conforma con representar sin precisión y cuidado el espacio, en realidad se puede resumir en las siguientes 3 fases:

Fase 1. Concepción. Donde la cartografía se apoya y fundamenta en las matemáticas, quienes crean un estudio teórico con principios, leyes, y sistemas de representación eficientes para proyectar.

Fase 2. Producción. En donde se seleccionan las fuentes de información para construir la proyección cartográfica, y se materializa con ayuda de la fase 1, de la geodesia, topografía y fotogrametría.

Fase 3. Utilización. Donde finalmente se divulga la carta en donde se plasmó el espacio y se utiliza para diferentes fines.

El uso idóneo de los productos obtenidos con la cartografía, depende fuertemente de la base matemática que se utilice, bien lo dice el cartógrafo Konstantin Alekseyevich Salichtchev, quien realizó múltiples aportaciones a la cartografía matemática entre 1960 y 1970, entre ellas mapas detallados de las cuencas de los ríos Anadyr, Kolyma, e Indigirka en Rusia. Creó el llamado “Gran Atlas soviético del mundo” y mejoró y estandarizó el contenido de todos los mapas que hizo. En una de sus obras, titulada *Introducción a la cartografía* menciona que “Una carta es una representación reducida, generalizada, matemáticamente precisa de la superficie terrestre sobre un plano, que muestra la situación, distribución y relaciones de los diversos fenómenos naturales y sociales, escogidos y definidos en función del objetivo de cada carta [...]” ((Salichtchev, s.f.), como se citó en Sevilla, 1986). Es por ello, que el estudio para la construcción de mapas puede dividirse

en una categoría importante llamada “Cartografía matemática”, que desarrolla y aplica matemáticas para que sean la herramienta principal de la creación de mapas y que será el principal apoyo en el desarrollo del presente proyecto.

Ahora puede surgir la pregunta ¿Cómo hace la cartografía matemática para ayudar a construir grandes y útiles mapas?

En el proceso de proyectar el espacio en el plano, se ha encontrado un límite para la proyección, el cual se demuestra con el Teorema egregio de Gauss, que dice que podemos transformar sin alterar distancias, una superficie en otra superficie, sólo si ambas tienen la misma curvatura, de lo contrario, transformar una superficie en otra sin alterar distancias otra implica alterar sus detalles, tales como la forma, los ángulos o distancias. En el caso de proyectar un planeta en una carta, este fenómeno se hace presente porque al menos nuestro planeta tiene curvatura puesto que no es un geoide.

Para cada tipo de distorsiones existen 3 tipos de proyecciones cartográficas que las conservan, es decir, existen las proyecciones equivalentes, conformes, y equidistantes, que conservan áreas, ángulos, y distancias, respectivamente. Estos 3 tipos de proyecciones fueron creados por la cartografía matemática, quien se apoya de la trigonometría esférica, geometría diferencial, geometría proyectiva, geometría riemanniana, variable compleja, entre otros.

Además, crea procedimientos para alterar progresiva y minoritariamente las alteraciones en las representaciones, como transformar primero al planeta que se desea proyectar, en un *geoide*, el cual simula a la Tierra con todos sus mares con marea baja (véase ilustración 1) para posteriormente transformar este geoide en un *elipsoide de revolución*, el cual contiene una métrica y curvatura definidas, suficientes para finalmente tener la proyección cartográfica del planeta en cuestión.

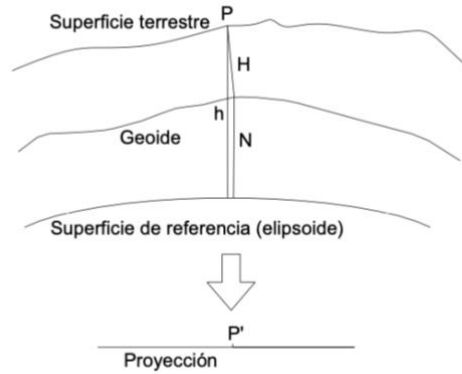
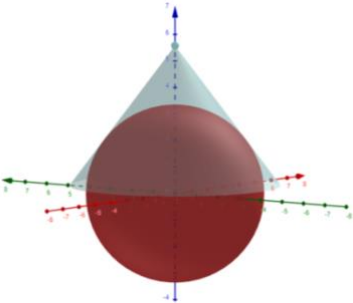


Ilustración 1. Superficies en el proceso de representación cartográfica

Más aún, la cartografía matemática se apoya de diferentes figuras geométricas para *aplanar* los planetas sin rasgar, deformar o contraer el detalle del espacio, en este aspecto las mejores opciones con las que se cuenta son cilindros, conos y planos, con los cuales se genera una nueva forma de categorizar las proyecciones cartográficas:

Tipo de proyección	Cómo se usa el cilindro, cono, o plano	Ilustración
Utilizando un cilindro se genera una proyección cilíndrica	El cilindro... <ul style="list-style-type: none"> ▪ se puede colocar verticalmente, de modo que el cilindro toca el planeta a lo largo del Ecuador ▪ se puede colocar horizontalmente, de modo que el cilindro toca el 	

	<p>planeta a lo largo del Meridiano de Greenwich</p>	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ se puede colocar inclinado, de modo que el cilindro toque cualquier otra línea imaginaria en el planeta. 	
<p>Utilizando un cono se genera una proyección cónica</p>	<p>El cono...</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ se coloca generalmente en la parte superior del globo, alineando el cono de modo que éste sea tangente a algún paralelo. 	 <p>Diagrama que muestra un cono (representado en azul claro) tangente a un paralelo (línea horizontal) del globo (representado en rojo oscuro). El eje vertical del globo está etiquetado con 'N' (Norte) y 'S' (Sur). El eje horizontal del globo está etiquetado con 'E' (Este) y 'O' (Oeste). El cono está orientado de modo que su superficie lateral toca el paralelo superior del globo.</p>
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ igual se puede colocar en la parte izquierda o derecha del globo, alineando el cono de forma tangencial, a un meridiano. 	

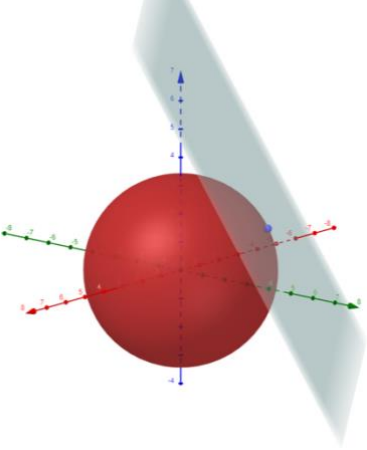
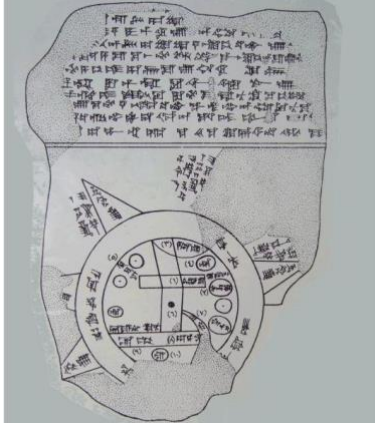
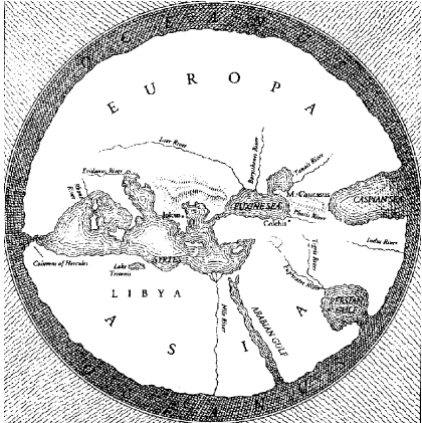
<p>Utilizando un plano se genera una proyección azimutal</p>	<p>El plano...</p> <ul style="list-style-type: none"> se puede colocar de manera <i>Ecuatorial</i>, es decir, el plano toca a lo largo del Ecuador 	
	<ul style="list-style-type: none"> se puede colocar de forma <i>Polar</i>, y en este caso toca a lo largo de un polo de la Tierra. 	 <p>Diagrama de un planeta rojo con un plano de proyección que toca a lo largo de un polo. El planeta está representado como una esfera roja con ejes de coordenadas (rojo, verde, azul). Un plano gris semi-transparente está posicionado verticalmente, tocando el planeta en su polo superior. El plano muestra una proyección de la superficie del planeta.</p>
	<ul style="list-style-type: none"> también puede colocarse de forma oblicua y así toca a la Tierra a lo largo de cualquier punto en ella. 	

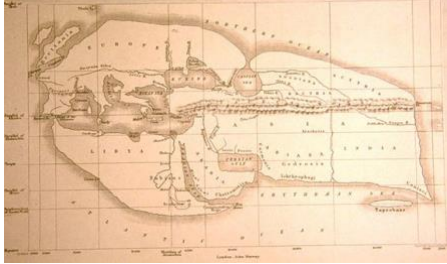
Tabla 1. Tipos de proyecciones cartográficas



Estas proyecciones entran, además, en alguna de las 3 categorías previamente mencionadas, surgiendo así proyecciones cilíndricas equidistantes, proyecciones azimutales conformes, azimutales equivalentes, y todas las posibles combinaciones.


Con esta poderosa herramienta, podemos tener mapas que describan lo que deseamos, ya sea calcular áreas de continentes, medir distancias entre países, medir arcos de meridianos, meridianos, paralelos, ubicar la próxima ciudad que visitaremos, conocer los ríos, lagos y montañas de otros lugares y muchas otras cosas que deseemos explorar, incluyendo otros planetas.

La sociedad humana ha estudiado la cartografía desde hace muchos siglos, su historia se remonta a Babilonia en el siglo VI antes de nuestra era. En la siguiente tabla se muestra de forma panorámica esta historia:

Fecha	Mapa	Información sobre el mapa
Siglo VI. a.C	<p data-bbox="423 533 784 569">Mapa babilónico del mundo</p>  <p data-bbox="423 1045 927 1119"><i>Imago Mundi de Babilonia (600 Ac) Britis Museum. (s. f.). Aryse. https://www.aryse.org/el-mapa-mas-antiguo-del-mundo/</i></p>	<p data-bbox="954 533 1377 1003">Creada en Babilonia. Y expresado en escritura cuneiforme. Representa al mundo como un disco rodeado de un río salado, pues los babilonios pensaban que la tierra era plana.</p> <p data-bbox="954 1045 1344 1224">Describe 7 islas míticas que se encuentran en medio del océano.</p>
520. a. C	<p data-bbox="423 1293 740 1329">Mapa del mundo en escala</p>  <p data-bbox="423 1797 873 1871"><i>Sin título. (s. f.). Proyecto Telémaco. https://proyectotelemaco.com/filosofia/presocraticos/anaximandro/</i></p>	<p data-bbox="954 1293 1360 1839">Creado en Grecia por Anaximandro, quien recopiló la información que los viajeros tenían sobre el mundo. Intentó establecer relaciones de proporcionalidad entre el plano y el mundo, al que consideraba la base de un cilindro.</p>

<p>Entre 275-194 a.C</p>	<p>Mapa del mundo con un sistema de meridianos</p>  <p><i>Sin título.</i> (s. f.-b). BBVA Open Mind. https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/mathematicas/eratostenes-midiendo-lo-imposible</p>	<p>Creado en Grecia por Eratóstenes de Cirene, quien influenciado por las de Platón sobre la esfericidad del mundo. Este mapa contenía ríos, montañas y poblaciones, así como nombres de ciertas porciones de tierra y de mar. El mapa está dividido en meridianos, formados a partir de 2 ejes perpendiculares (uno de sur a norte, y otro de oeste a este). Por otra parte, Eratóstenes además aproximó el diámetro de la Tierra.</p>
<p>Siglo II a. C</p>	<p>Primer mapa del mundo que utiliza matemáticas para proyectar el espacio, con sistema de latitudes y longitudes.</p>	<p>Creado en Grecia por Claudio Ptolomeo. En su obra “Geografía” muestra una proyección cónica de lo que se conocía de la esférica Tierra, con un sistema de</p>

	 <p><i>Sin título.</i> (s. f.-c). El país. https://elpais.com/cultura/2013/12/27/actualidad/1388155453_145267.html</p>	<p>latitudes y longitudes con las que describió 8000 ubicaciones mediante coordenadas por primera vez en la historia, además de introducir una serie de instrucciones específicas para la construcción de un mapa.</p>
<p>Entre el siglo VIII y XV.</p>	<p>Primer mapa científico después de la Edad Media.</p>  <p><i>Mapa de al-Idrisi.</i> (s. f.). Caminando por la historia. https://caminandoporlahistoria.com/al-idrisi/</p>	<p>Mientras en Europa medieval prevalecía el oscurantismo en todas las áreas del conocimiento incluyendo la cartografía, en Arabia, el matemático y geógrafo Abu Abdullah Muhammad al-Idrisi retomó las ideas de que la Tierra no era plana, aproximó que la circunferencia de la Tierra era de 37,000 metros de longitud, y construyó un mapa que dejó atrás la geometría plana, comenzando representaciones curvas que contenían líneas</p>

		<p>onduladas. Este mapa representa la Península Ibérica, Península Arábiga, Europa Central, y Asia. Preserva distancias, contiene datos del clima, cultivos, zonas de acceso y situación de acuíferos.</p>
<p>1569</p>	<p>Mapamundi de Mercator</p>  <p><i>Mapamundi de Mercator.</i> (s. f.). Wikipedia. https://es.wikipedia.org/wiki/Proyecci3n_de_Mercator</p>	<p>Creado por Gerardus Mercator, utilizó por primera vez la proyección cilíndrica. Este mapa preservó formas y proporciones de objetos pequeños, aunque los objetos grandes los distorsiona. Este mapa fue tan importante que revolucionó la cartografía matemática, convirtiendo este mapa en una proyección estándar llamada “Proyección de Mercator”</p>
<p>1999</p>	<p>Proyección AuthaGraph</p>	<p>Creada por Hajime Narukawa, esta proyección es considerada</p>


	 <p><i>AuthaGraph</i>. (s. f.). La brújula verde. https://www.labrujulaverde.com/2016/11/authagraph-un-mapa-del-mundo-que-muestra-las-autenticas-proporciones-de-los-continentes</p>	<p>hasta el momento, la proyección más exacta de nuestro planeta.</p> <p>Esta proyección es equivalente (conserva áreas). Consiguió este detalle dividiendo a la Tierra en 96 triángulos y plasmando cada uno de ellos en un rectángulo, respetando su respectiva proporcionalidad.</p> <p>Además, esta proyección conserva formas y tamaños de todos los continentes y océanos</p>
--	--	---

Tabla 2. Mapas más importantes a lo largo de la historia humana.

Una interesante e importante evolución que han tenido las proyecciones cartográficas son los Sistemas de Información Geográfica (SIG, por sus siglas en español), los cuales trascienden del plano en papel y de la mano de los avances tecnológicos e informáticos, almacenan información geográfica para analizarla y modelarla, así como para resolver complejos problemas de geografía. Ayudándonos así a que comparemos escalas y perspectivas entre diferentes proyecciones de un mismo espacio geográfico, proporcionándonos mientras la posibilidad de integrar datos geográficos y topológicos.

De este modo, un SIG es capaz de responder mediante mapas las características de un área determinada y en cartografía, claro, facilitan el proceso de construir un mapa.

Los SIG se construyen mediante vectores o matrices; con el primero se genera un SIG vectorial, en donde cada objeto sobre el espacio es un vector. Por otra parte, un SIG matricial conserva la información asignando a cada valor de la matriz un punto en el mundo real. Luego, se adapta e integra en un hardware y software específico para que las personas lo podamos utilizar. Hoy en día los SIG son tan útiles que se puede afirmar que la mayor parte de la población mundial ha usado uno, ya que lo utilizan personas que usan información geográfica para investigar y desarrollar nuevas tecnologías, crear mapas o resolver un proyecto concreto; emprendedores que deciden dónde es mejor desarrollar un negocio; administración pública y gobiernos; pero también internautas que buscan en internet rutas y lugares en un mapa en línea, los cuales son una consecuencia directa del desarrollo de sistemas de información geográfica, los cuales a su vez, impulsaron la invención del Sistema de Posicionamiento Global (GPS por sus siglas en inglés), el cual, mediante 24 satélites artificiales orbitando a la Tierra, es capaz de ofrecerle al usuario su posición exacta en tiempo real, sin importar la hora ni el lugar en el que se encuentre. Esto gracias a un fenómeno geométrico llamado “trilateración”, en el cual mediante los 4 satélites más cercanos a un usuario deseando conocer su ubicación en la Tierra, recopilan información en forma de radios de esfera de las distancias del usuario a cada uno de los satélites; la intersección de los 4 radios es la ubicación exacta del internauta. Hoy este innovador invento se encuentra mayormente en la aplicación “Maps” de iPhone y en “Petal Map” para celulares inteligentes Huawei, y “Google Maps” (quién utiliza otro SIG para su GPS) está disponible en el resto de los dispositivos móviles que diariamente utilizamos como parte de nuestra vida cotidiana.

Herramientas matemáticas. Un viaje por diferentes geometrías.

Para construir una representación cartográfica de nuestro vecino rojo, resulta necesario primero familiarizarnos con herramientas matemáticas que por separado nos proporcionan información interesante, pero que en conjunto pueden generar un plano completo que nos permita visualizar una región específica de cualquier superficie sobre Marte.

En términos generales podemos pensar en Marte como una esfera, ya que la geometría esférica es la geometría que mejor describe nuestro planeta Tierra y en general, cualquier planeta. Emprendamos así un viaje por diferentes geometrías y armémonos de herramientas para desarrollar el mapa.

Motivación de usar geometría esférica

Antes de introducir el objeto de estudio que tiene esta geometría, deseo enfatizar por qué es ella nuestra mejor y principal aliada.

Con la geometría euclídea, donde los ángulos interiores de todo triángulo suman 180° , y las reglas clásicas de trigonometría funcionan, podemos resolver problemas interesantes aplicados al mundo real, como el siguiente:

- 1. Dado el edificio Empire State en la ciudad de Nueva York, cuya altura es 1248 pies, y un espectador a una determinada distancia de él, cuyo ángulo de sus ojos hacia la punta del edificio es 5° . Responda ¿Qué tan lejos se encuentra el observador?***

El ejercicio se puede resolver teniendo en cuenta la siguiente ilustración:

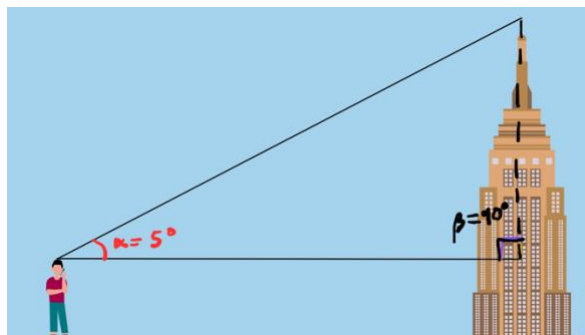


Ilustración 2. Para ilustrar el problema en cuestión.

Con ello, al tratarse de un triángulo rectángulo y como tenemos el valor de los ángulos α y β , y la altura del edificio, podemos utilizar la definición de la razón trigonometría arcotangente,

$$\tan (\alpha)^{-1} = \frac{ca}{co}$$

$$\tan (5^\circ)^{-1} = \frac{ca}{1248}$$

despejando ca :

$$\tan (5^\circ)^{-1} \cdot 1248 = ca$$

$$1714.004157 = ca$$

y como el cateto adyacente es el que estábamos buscando, 1714.004157 pies es la distancia del observador al edificio.

No obstante, consideremos ahora la siguiente situación: Supongamos que estamos de pie sobre la orilla de una playa y podemos ver hasta 10 kilómetros en dirección al mar. Nos comentan además que hay una baliza flotante a 7 kilómetros flotando sobre él ¿Podríamos observar la baliza?

Una primera respuesta puede ser “sí, porque podemos ver hasta 10 kilómetros sobre el mar, y 7 es menor que 10, por lo que podremos ver la baliza a 7 kilómetros de distancia” y un posible modelo que puede describir ese fenómeno es el siguiente:



Ilustración 3. Suposición del problema en un mundo euclídeo.

En efecto, tiene sentido pensar que podemos observar la baliza. Sin embargo, ese modelo no considera que el planeta no es plano y por ende, tiene curvatura. Quizás la siguiente ilustración lo explique mejor



Ilustración 4. Problema en un mundo no euclídeo.

Donde un triángulo rectángulo en un mundo plano, se vuelve obtusángulo o quizás acutángulo en un mundo curvo.

La geometría esférica es la rama de las matemáticas que se encarga de demostrar y establecer las reglas de distancia y de trigonometría de los puntos de una esfera.

Dado que pensaremos a Marte como una esfera, resulta útil conocer sus reglas para su proyección cartográfica.

“Cartografiando” la Tierra. Coordenadas geográficas

Como se vio en el apartado “Antecedentes cartográficos”, la necesidad humana de sintetizar y observar en un plano el espacio en donde nos desarrollamos, motivó la creación de herramientas matemáticas que nos permitieran precisar nuestros dibujos del planeta, sin embargo, esos intentos resultan absurdos si antes no se tiene una forma de ubicar cada punto de la Tierra para luego plasmarlo en papel. Por esta razón es que se crearon las “Coordenadas geográficas”.

Nombraremos ahora lugares clave en la Tierra para la construcción de dichas coordenadas.

Definición.

Un meridiano es una semicircunferencia imaginaria que pasa por el polo norte y por el polo sur.

Definición.

El “Meridiano de Greenwich” es un meridiano escogido convencionalmente para fijar un meridiano de referencia.

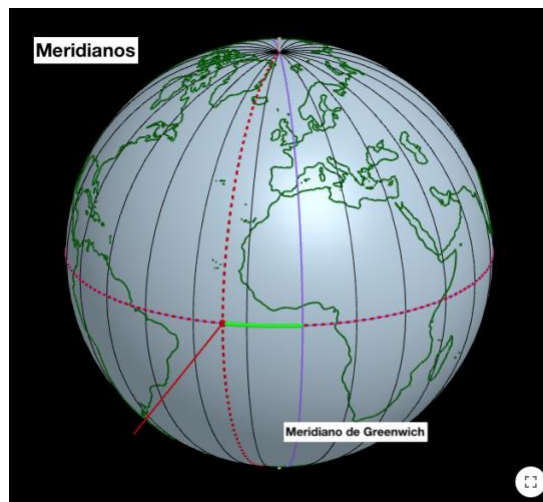


Ilustración 5. Meridianos en la Tierra. Meridiano de Greenwich de color morado.

Definición

Un paralelo es una intersección entre un plano imaginario que corta al planeta, con un plano imaginario perpendicular al eje de rotación de la Tierra.

Definición

El paralelo máximo de la Tierra se llama “Ecuador”.

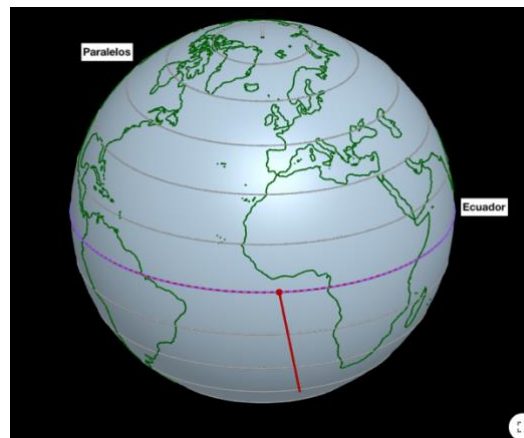


Ilustración 6. Paralelos sobre nuestro planeta. Ecuador de color morado.

Con las definiciones anteriores podemos definir los siguientes conceptos:

Definición

Sea A sobre la tierra y O el centro del planeta.. Se le llama “Longitud” al ángulo formado entre el meridiano de Greenwich y el meridiano que pasa por A.

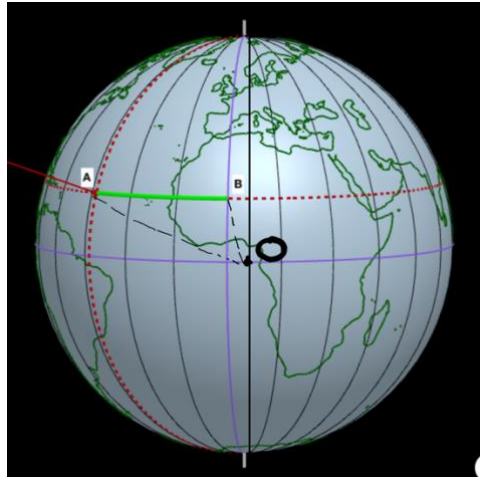


Ilustración 7. Ilustración de meridiano.

Definición

Sean A' y B' dos puntos sobre un mismo meridiano, sea O el centro del planeta y sea A'O, B'O dos rectas. Se le llama “Latitud” al ángulo $\angle B'OA'$.

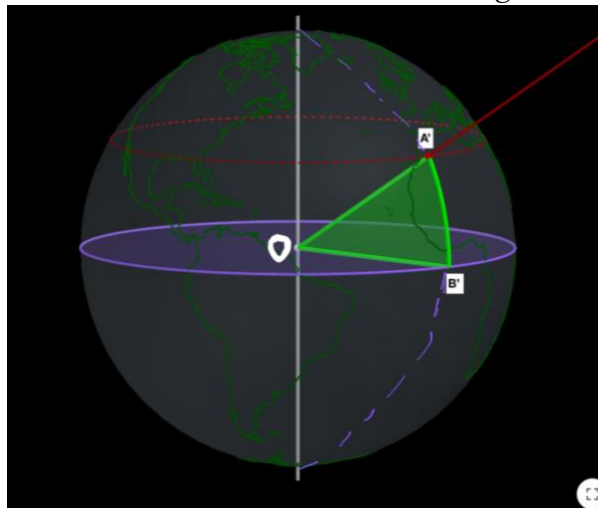


Ilustración 8. $\angle B'OA'$

Mediante la latitud y la longitud, expresadas en forma de pareja ordenada, se podrá ubicar de manera única cualquier punto de la el planeta.

Coordenadas esféricas

La creación de las coordenadas anteriores solo es aplicable a planetas; la generalización de dicho sistema a cualquier esfera se describe de la siguiente manera:

De coordenadas esféricas a cartesianas

Las coordenadas esféricas de un punto P están dadas de la siguiente forma $P = (\rho, \theta, \varphi)$ donde ρ es la distancia del centro de la esfera al punto P, θ es el ángulo entre el eje X y la proyección de P en el plano XY; mientras que φ es el ángulo entre ρ y el eje Z (del cual tomaremos la dirección positiva).

La conversión de coordenadas cartesianas a esféricas se da mediante las siguientes fórmulas:

$$x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$$

$$z = \rho \cos\varphi.$$

Coordenadas cilíndricas

De coordenadas cartesianas a cilíndricas

Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ un cilindro, y sea $A = (x, y, z) \in C$.

Para obtener las coordenadas cilíndricas de A, se proyectará sobre el plano XY el punto A (es decir, quitamos la altura z), se obtendrá $A' = (x, y, 0)$ en consecuencia de ello estaremos en \mathbb{R}^2 , y ahí obtendremos las coordenadas polares de A', las cuales están dadas por las siguientes fórmulas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),$$

entonces $A' = (r, \theta)$.

Finalmente añadiremos la altura z y se tendrá que $A = (r, \theta, z)$ en coordenadas cilíndricas.

Conversión de coordenadas cartesianas en una esfera a coordenadas cartesianas en un cilindro.

Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ un cilindro tangente a S en el ecuador, y $D = (x, y, z)$ un punto en S .

La proyección de D en C se obtiene de la siguiente manera:

$$D' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

Proyección estereográfica

Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ una esfera unitaria, también conocida como "Esfera de Riemann". Y sea $P^1(\mathbb{C})$ un proyectivizado del campo complejo o también conocido "Plano complejo extendido", situado a la altura del ecuador de la esfera.

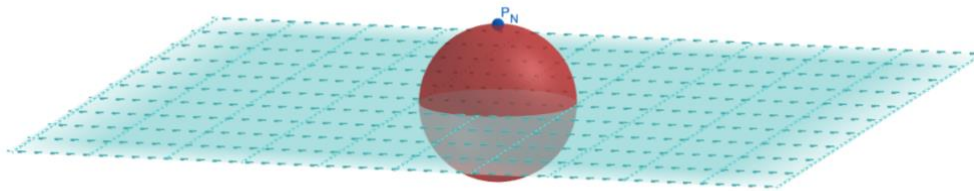


Ilustración 9. Esfera S^2 y el plano complejo, cuya intersección de ambos es el ecuador de S^2

La "Proyección estereográfica" es una función $\Pi: S^2 \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ que establece un homeomorfismo, es decir que dicha función es biyectiva, continua y con inversa continua, que implica todo punto sobre S^2 (excepto el polo norte) determina con el polo norte una recta que en algún momento interseca al plano $P^1(\mathbb{C})$, de modo que a cada punto de S^2 le corresponde un único punto en $P^1(\mathbb{C})$ y al revés.

Analíticamente hablando, este procedimiento puede determinarse mediante la siguiente manera:

Dado el punto $P = (x, y, z)$, su proyección estereográfica P' está dado por las siguientes ecuaciones:

$$P' = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

Proyección estereográfica de un triángulo esférico equilátero

Resulta interesante poner en práctica algunos ejercicios antes de generar una proyección estereográfica de Marte, uno de ellos se relaciona con triángulos.

Sea ΔABC un triángulo esférico equilátero, cuyos arcos de circunferencia (como lados del triángulo) miden 1.05 grados. Dicho triángulo se encuentra en una esfera unitaria S situada en el origen. Sus coordenadas cartesianas son las siguientes:

	x	y	z
A	-0.38	-0.13	0.92
B	-0.2	-0.92	0.33
C	-0.95	-0.3	0.11

Tabla 3. Coordenadas cartesianas de ΔABC

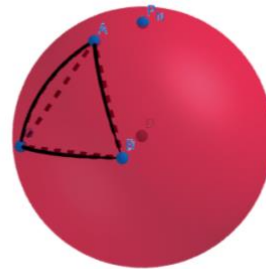


Ilustración 10. Triángulo esférico ΔABC y el Polo norte denotado $P_N=(0,0,1)$

Sorprendentemente, las distancias euclídeas entre cada uno de ellos miden 1 cada uno, es decir, en distancia euclídea el triángulo también es equilátero.

Queremos ver cómo se transformará tras la proyección estereográfica ¿Se conservarán las distancias? ¿Habrá distancias proporcionales al triángulo ΔABC ?

El proceso de trazar la recta que pasa por el polo norte N y cada vértice de ΔABC , para luego localizar la proyección de esos vértices en el plano complejo, es equivalente a utilizar la ecuación

1.

De la ecuación 1 se tiene que dados (x, y, z) , su proyección estereográfica está dada por $\frac{x}{1-z}, \frac{y \cdot i}{1-z}$,

por lo que, del punto $A = (-0.38, -0.13, 0.92)$ su proyección $A' = \left(\frac{-0.38}{1-0.92}, \frac{-0.13 \cdot i}{1-0.92}\right) =$

$$\left(\frac{-0.38}{0.08}, \frac{-0.13 \cdot i}{0.08}\right) = -(4.75, -1.625i)$$

Con los vértices B y C el procedimiento es análogo y así se obtuvo el siguiente resultado:

	x	i
A'	-4.75	-1.625i
B'	-0.2985075	-1.373134328i
C'	-1.0674157	-0.337078651i

Tabla 4. Coordenadas en el plano complejo de $\Delta A'B'C'$

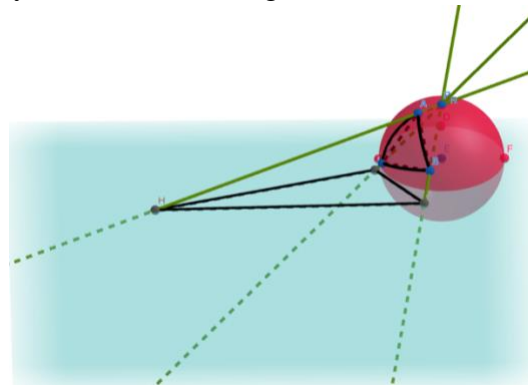


Ilustración 11. Representación geométrica de lo que sucedió al proyectar estereográficamente el triángulo ΔABC ,

Se puede apreciar claramente que el triángulo se distorsionó bastante, en realidad las nuevas distancias no son iguales entre sí, y el triángulo equilátero ΔABC se convirtió en un triángulo escaleno $\Delta A'B'C'$.



Ilustración 12. Proyección estereográfica de ΔABC

Proyección estereográfica de un cardioide

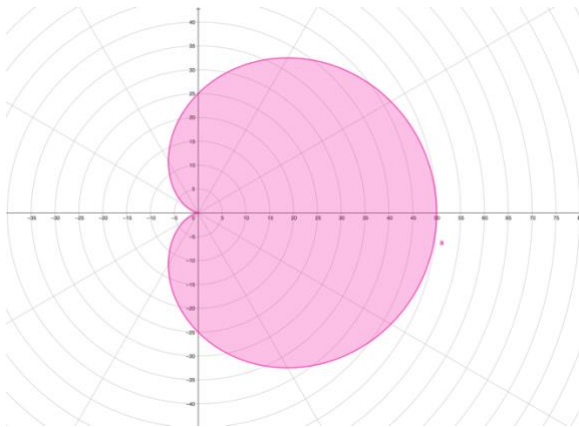
Las nuevas distancias euclídeas son

$$d(A, B) = 3.71, d(A, C) = 4.28$$

$$\text{y } d(BC) = 1.29.$$

Luego de observar la proyección de un triángulo esférico equilátero, provoca curiosidad observar cómo se comportará la proyección estereográfica de una figura con curvas.

El cardioide es una curva perteneciente a las epicicloides, por lo que es una curva generada por la trayectoria de un punto fijo en una circunferencia que rueda sobre otra circunferencia externa y de radio mayor que la primera.



Debido a que se trata de una curva graficable en \mathbb{R}^2 , la gráfica de esta curva en una esfera en \mathbb{R}^3 resulta complicada. Por ello se aproximó manualmente el contorno de la figura sobre la misma esfera S unitaria, fijada en el origen.

Ilustración 13. Cardioide en el plano polar, cuya ecuación que lo describe es $c=25(1+\cos(\theta))$

En este caso se hizo la proyección estereográfica a 19 puntos con las siguientes coordenadas cartesianas:

	x	y	z
A	-1	0	0
B	-0.96	0.24	0.15
C	-0.87	0.32	0.36
D	-0.77	0.22	0.6
E	-0.71	-0.08	0.7
F	-0.66	-0.37	0.65
G	-0.6	-0.59	0.54
H	-0.53	-0.77	0.35
I	-0.45	-0.87	0.18
J	-0.39	-0.92	0.01
K	-0.99	0.06	-0.16
L	-0.93	0.2	-0.3
M	-0.83	0.22	-0.51
N	-0.7	0.16	-0.69
O	-0.68	-0.23	-0.7
P	-0.63	-0.47	-0.62
Q	-0.58	-0.68	-0.44

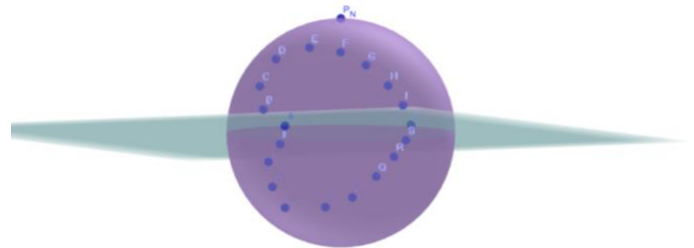


Ilustración 14. Cardioide sobre la superficie de una esfera unitaria.

R	-0.51	-0.82	-0.27
S	-0.43	-0.89	-0.12

Tabla 5. Coodenadas cartesianas de los puntos del cardioide sobre la esfera unitaria.

Y tras la proyección estereográfica, estas fueron las proyecciones de cada punto, siendo T la proyección de A, U la proyección de B, V la proyección de C y así sucesivamente:

	x	i
T	-1	0i
U	-1.13	0.28i
V	-1.38	0.51i
W	-1.94	0.56i
Z	-2.36	-0.28i
A_1	-1.91	-1.06i
B_1	-1.3	-1.27i
C_1	-0.82	-1.19i
D_1	-0.55	-1.07i
E_1	-0.4	-0.93i
F_1	-0.39	-0.8i
G_1	-0.4	-0.64i
H_1	-0.41	-0.47i
I_1	-0.39	-0.29i
J_1	-0.4	-0.13i
K_1	-0.42	0.1i
L_1	-0.55	0.15i

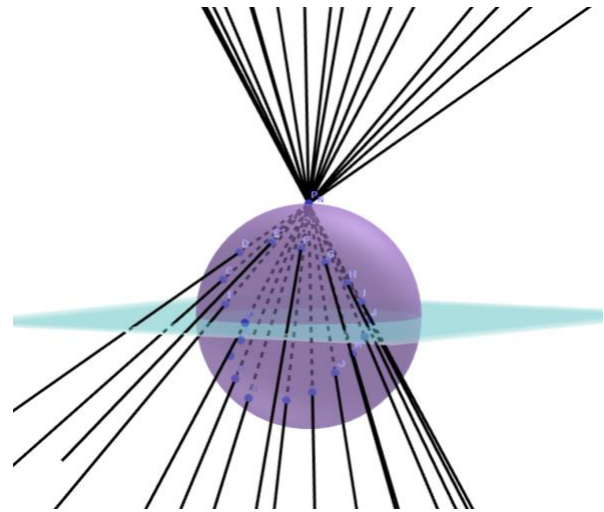


Ilustración 15. Representación visual del cardioide siendo proyectado estereográficamente.

Mientras que la vista de esos puntos sobre el plano complejo es la siguiente:

Tabla 6. Coordenadas de la proyección estereográfica del cardioide, las cuales se dan en el plano complejo

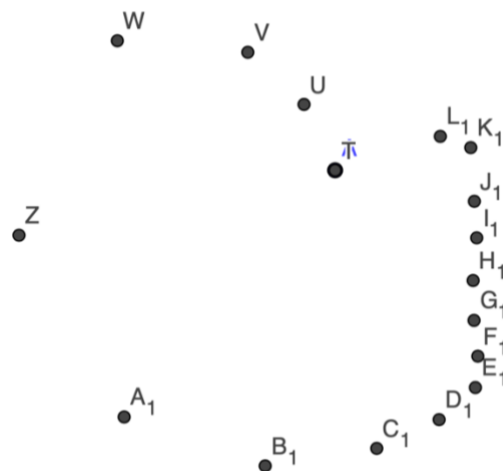


Ilustración 16. Proyección estereográfica de cardioide.

Al rotar la imagen 90 grados hacia la izquierda para luego reflejarla horizontalmente, obtenemos una vista donde se mira cómo los puntos A, B, C, D, E... y sus respectivas proyecciones T, U, V, W, Z... se encuentran en la parte superior del cardioide.

Podemos resaltar que los puntos en la parte inferior de la proyección (que se encontraban en el hemisferio sur de la esfera) dejan de trazar el segundo arco del cardioide. Esto ocurre debido a que cada punto del hemisferio norte tiene un ángulo respecto al eje z mayor que los puntos sobre el hemisferio sur. Entre más grande sea dicho ángulo formado, mayor será la distancia que tenga su proyección hacia el origen (0,0i).

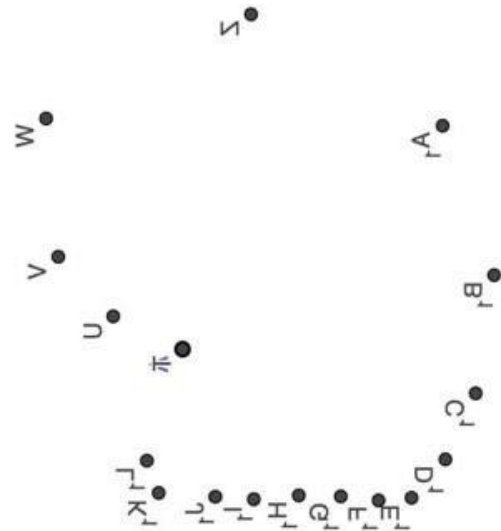


Ilustración 17. Proyección de cardioide, rotada 90 grados hacia la izquierda, y reflejada horizontalmente.

Es justo con este ejemplo que se puede notar que en general, todos los puntos que forman el hemisferio norte de la esfera S^2 de la definición de proyección estereográfica, tienen su proyección fuera del ecuador de la esfera, en el que se encuentra el plano complejo; los puntos que generan el ecuador permanecen en el mismo sitio tras la proyección (forman una circunferencia); mientras que los puntos que forman el hemisferio sur de la esfera permanecen dentro de la circunferencia del ecuador (Véase ilustración 9).

Probablemente ahora más que antes, hace sentido que $\Pi: S^2 \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ sea una función biyectiva, pues cada punto de la esfera es un punto del plano y al revés, es decir ¡La esfera es el plano complejo!

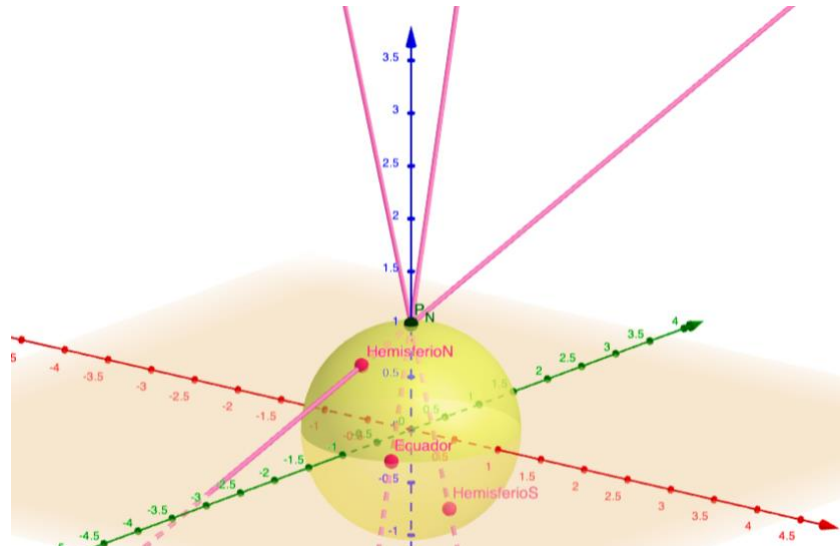


Ilustración 18. La esfera es el plano complejo. Se puede ver dónde se proyectan tres puntos, uno del hemisferio norte, otro del ecuador de la esfera, y otro del hemisferio sur de ella. En el plano se proyectan dentro, en, y fuera del ecuador (respectivamente)

Proyección cilíndrica axial

Otra útil e interesante práctica antes de cartografiar Marte consiste en proyectar las mismas figuras anteriores, pero ahora en un cilindro.

Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ una esfera unitaria, sea $C = x^2 + y^2 = 1$ un cilindro de radio 1, tangente verticalmente al ecuador de S^2 .

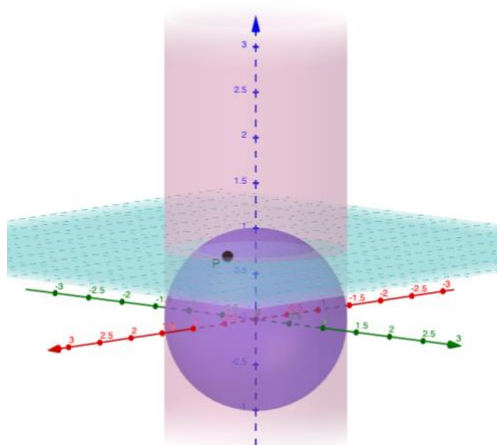


Ilustración 19. Esfera S^2 , Cilindro C tangente a S^2 en el ecuador. También se ve el punto P en S^2 , y el plano N a su altura.

Y sea P un punto en S^2 con coordenadas cartesianas (x, y, z) , diremos que la proyección de P sobre C (visualizándolo geoméricamente) consiste en trazar un nuevo plano N tal que $N = z$ (coordenada z de P) (véase ilustración 10).

Luego, sobre N se trazará la recta perpendicular al eje z llamada l que pase por P (pues como P y N poseen la misma altura, $P \in N$). De ese modo, se dirá que la intersección de l con C , es la proyección cilíndrica axial de P , es decir P' .

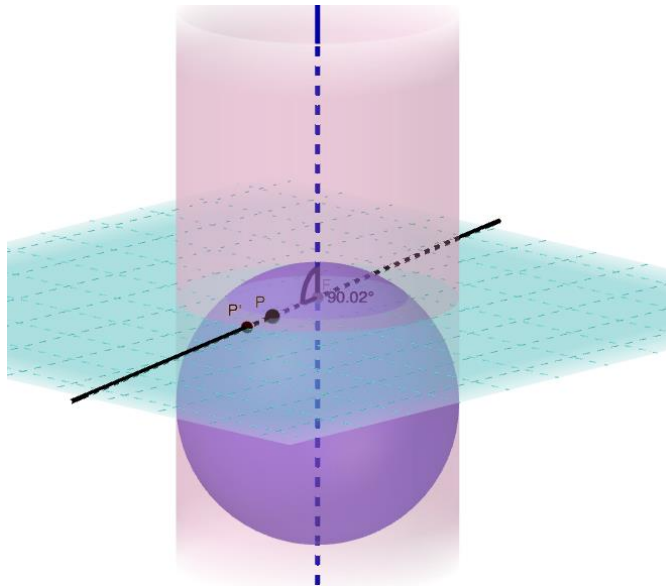


Ilustración 20. Intersección de l con C , es decir, el punto P'

Analíticamente, el proceso se puede explicar de la siguiente forma:

Pensemos que al proyectar el cilindro en realidad la proyección (en dos dimensiones, como en todo plano) se necesita ver en un plano y no en un cilindro tridimensional, es por ello que haremos un *corte vertical* al cilindro, para después *desdoblarlo* y visualizar ahora sí, en este caso en \mathbb{R}^2 , la proyección del punto. Llamaremos a C desdoblado C_d , y será un plano.

Integrando matemáticas, el corte sobre C se convertirá en el eje Y de C_d . Esto quiere decir que que las coordenadas z en C , serán las coordenadas y en C_d . (Véase ilustración 21).

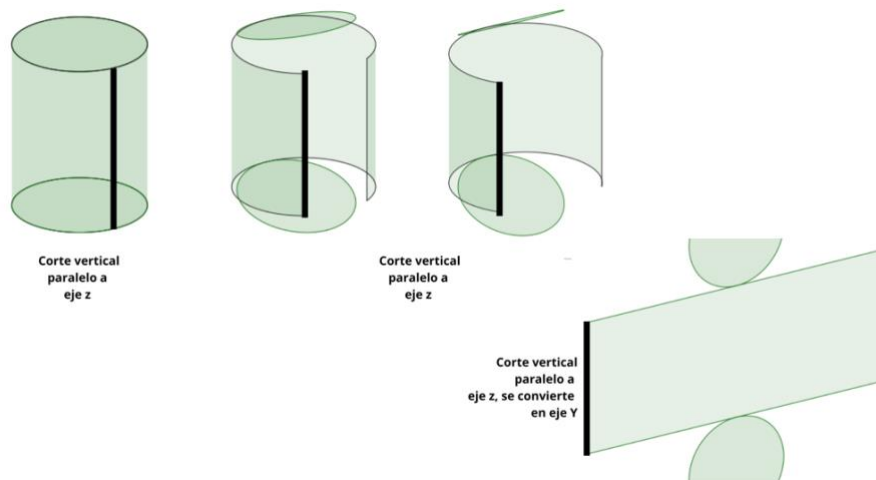


Ilustración 21. Proceso de cortar verticalmente a C , convirtiéndose así en un plano C_d . Note que la línea negra más gruesa es un eje paralelo al eje Z , y tras el corte se convierte en eje Y .

Mientras que el eje y se *aplata* y el eje x se *estira*. Y por lo tanto las coordenadas (x, y) se modifican, para obtener la nueva

coordenada (x') proyectaremos antes

de la transformación de C a C_d sobre un

plano que tenga la altura del ecuador, las

coordenadas (x, y) , las cuales podríamos

describirlas en coordenadas polares como

(r, θ) donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ sin embargo durante la transformación, la primera

entrada del punto $P=(r, \theta)$ dejará de brindarnos la distancia que tiene del polo hacia P debido a

que dicha transformación degenera el radio, ahora es inútil para la nueva coordenada x' , empero,

la segunda entrada θ seguirá diciéndonos la ubicación del punto, pues el polo se convertirá ahora

en el centro de C_d (porque estos puntos estaban a la altura del ecuador) y todo punto sobre el

plano podrá hallarse en términos de (x, y) . De esa manera podemos concluir que las nuevas

coordenadas (x', y') en C_d están descritas de la siguiente forma $x' = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $y' = z$, lo que

significa que esos puntos son la proyección cilíndrica axial de P , o bien P' .

Nota: Al igual que con la proyección estereográfica, resulta imposible proyectar el Polo Norte,

tanto geoméricamente como matemáticamente, pues dado el Polo Norte $P_N = (0,0,1)$ la única

recta que parte del eje z y va P_N es el mismo eje z, el cual por construcción es paralelo a las

paredes del cilindro, de modo que una intersección entre ambos es imposible o bien, en

geometría no euclídea, nos lleva a que se intersecan en *el punto al infinito*, el cual no está

determinado en un plano. Además, analíticamente, la proyección de P_N acorde a las fórmulas

recientemente deducidas, implicaría que la coordenada $y' = 1$ y la coordenada $x' = \tan^{-1}\left(\frac{0}{0}\right)$ lo

cual es una indeterminación ¡Imposible proyectar el polo norte!

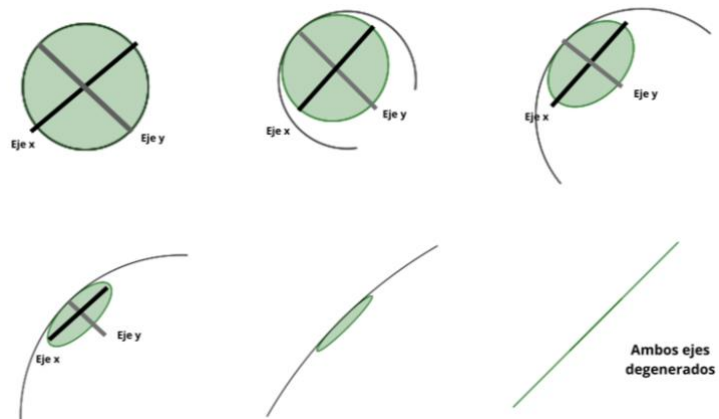


Ilustración 22. Proceso de "desdoblamiento" del cilindro (vista aérea).

Proyección cilíndrica axial de un triángulo esférico equilátero

Utilizando el mismo triángulo esférico equilátero ΔABC que usamos en la proyección estereográfica, veremos ahora cómo y cuánto se modifica el nuevo triángulo $\Delta A'B'C'$ que es la proyección cilíndrica axial de ΔABC . Las coordenadas cartesianas de ΔABC se pueden ver en la siguiente tabla.

	x	y	z
A	-0.38	-0.13	0.92
B	-0.2	-0.92	0.33
C	-0.95	-0.3	0.11

Tabla 7. Coordenadas cartesianas de triángulo esférico ΔABC

Recordemos también que ΔABC es equilátero tanto en geodésicas, como en distancia euclídea.

Ahora bien, la proyección de los puntos A, B y C se puede obtener con las ecuaciones deducidas anteriormente. Por ello, se tiene lo siguiente:

Proyección del punto A: Dado que $A = (-0.38, -0.13, 0.92)$ para obtener las coordenadas

$$(x'y'): x' = \tan^{-1}\left(\frac{-0.13}{-0.38}\right) = 0.329624407 \text{ y } y' = z = 0.92, \text{ de modo que}$$

$$A' = (0.329624407, 0.92)$$

Proyección del punto B: Utilizando las ecuaciones deducidas se tiene:

$$x' = \tan^{-1}\left(\frac{-0.92}{-0.2}\right) = 1.356735643 \text{ y } y' = z = 0.33, \text{ por lo tanto}$$

$$B' = (1.356735643, 0.33)$$

Proyección del punto C: Como $C = (-0.95, -0.3, 0.11)$, la proyección cilíndrica axial

$$\text{de C es } x' = \tan^{-1}\left(\frac{-0.3}{-0.95}\right) = 0.305878871 \text{ y } y' = z = 0.11 \text{ por lo que}$$

$$C' = (0.305878871, 0.11)$$

Y así, los vértices del triángulo $\Delta A'B'C'$ son $A' = (0.329624407, 0.92)$,

$B' = (1.356735643, 0.92)$, $C' = (0.305878871, 0.11)$, los cuales en el plano cartesiano se ven de la siguiente manera:

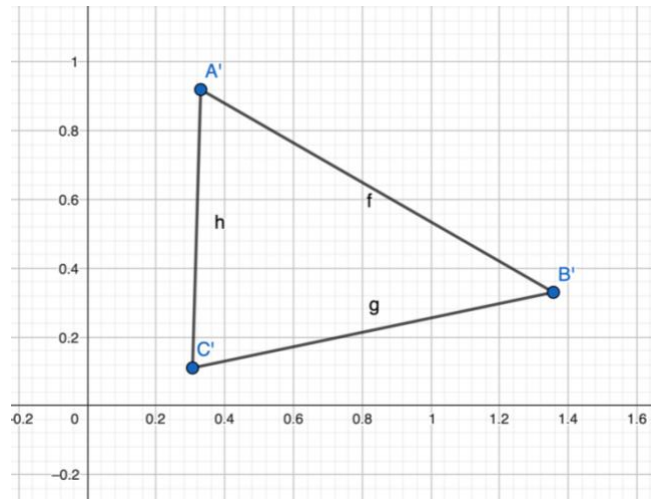


Ilustración 23. Proyección cilíndrica axial de triángulo ΔABC .

La cual, en comparación con la ilustración 3 que muestra la proyección estereográfica de este mismo triángulo ΔABC , no distorsiona tanto las distancias, puesto que las nuevas distancias euclídeas son $d(A', B') = 1.1845$, $d(B', C') = 1.0736$ y $d(C', A') = 0.81034$.

Proyección cilíndrica axial de un cardioide

En este punto podemos pensar que la proyección cilíndrica resulta proyectar con menos deformaciones de distancias las figuras, pero ¿Esa deformación menor seguirá siendo notable en una figura más compleja que contenga curvas no rectas?

Para experimentar y confirmar dicha suposición, trabajamos con el cardioide pasado para observar su comportamiento tras ser proyectada en un cilindro. Los resultados de transformación de coordenadas esféricas a cilíndricas, y luego a su proyección se condensan en la siguiente tabla:

	Coordenadas de cardioide en esfera:			Coordenadas en cilindro			Proyección cilíndrica	
	x	y	z	x	y	z	x	y
A	-1	0	0	-1	0	0	0	0
B	-0.96	0.24	0.15	-0.9701425	0.24253563	0.15	-0.2449787	0.15
C	-0.87	0.32	0.36	-0.9385272	0.34520539	0.36	-0.3524576	0.36
D	-0.77	0.22	0.6	-0.9615239	0.27472113	0.6	-0.2782997	0.6
E	-0.71	-0.08	0.7	-0.9937119	-0.1119675	0.7	0.11220281	0.7
F	-0.66	-0.37	0.65	-0.8722806	-0.4890058	0.65	0.51094958	0.65
G	-0.6	-0.59	0.54	-0.7130237	-0.70114	0.54	0.776995	0.54
H	-0.53	-0.77	0.35	-0.5669828	-0.8237297	0.35	0.96795802	0.35
I	-0.45	-0.87	0.18	-0.4594229	-0.8882176	0.18	1.09345094	0.18
J	-0.39	-0.92	0.01	-0.3902928	-0.9206908	0.01	1.1698467	0.01
K	-0.99	0.06	-0.16	-0.9981685	0.06049506	-0.16	-0.060532	-0.16
L	-0.93	0.2	-0.3	-0.9776483	0.21024695	-0.3	-0.2118275	-0.3
M	-0.83	0.22	-0.51	-0.9666204	0.25621265	-0.51	-0.259102	-0.51
N	-0.7	0.16	-0.69	-0.9748585	0.2228248	-0.69	-0.2247112	-0.69
O	-0.68	-0.23	-0.7	-0.947281	-0.3204039	-0.7	0.32615581	-0.7
P	-0.63	-0.47	-0.62	-0.8015241	-0.5979624	-0.62	0.64095659	-0.62
Q	-0.58	-0.68	-0.44	-0.6489466	-0.760834	-0.44	0.86459723	-0.44
R	-0.51	-0.82	-0.27	-0.528136	-0.8491598	-0.27	1.0143924	-0.27
S	-0.43	-0.89	-0.12	-0.435032	-0.900415	-0.12	1.12072254	-0.12

Tabla 8. Coordenadas cartesianas de cardioide en la esfera y en el cilindro. En la última columna su proyección cilíndrica axial.

Y la proyección en el plano tiene la siguiente imagen:

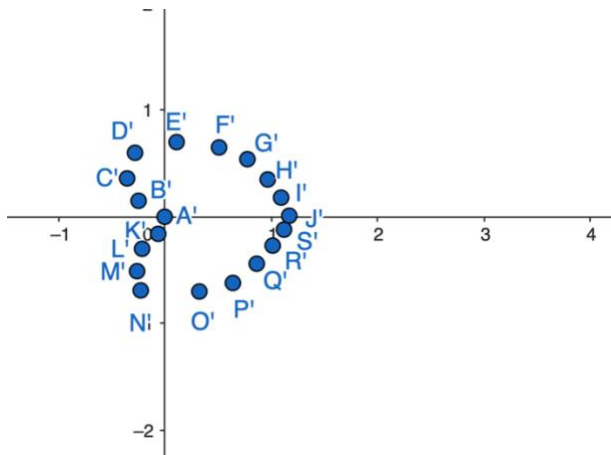


Ilustración 24. Proyección cilíndrica axial de cardioide.

En donde la primera y más notoria observación es que la proyección sí parece un corazón, es decir, en efecto la proyección cilíndrica axial preserva en mayor medida la forma que la proyección estereográfica.

Resultados

Ahora que se tienen suficientes herramientas matemáticas, ha llegado el momento de hacer una proyección cartográfica de Marte.

Se decidió trabajar con la proyección cilíndrica axial, debido a que la proyección estereográfica no preserva las formas como se deseó desde el inicio del proyecto, mientras que la primera produce menores deformaciones en las regiones de interés.

Herramientas computacionales

A causa de que proyectar un planeta ajeno al que vivimos requiere mucha información fiable de su superficie para poder trabajar adecuadamente, se hizo una vasta búsqueda de información disponible sobre Marte y su superficie. Se encontró así el portal en línea de la NASA para la exploración de Marte llamado “Mars Trek”, en el cual se encuentran los datos recopilados por esta institución en varios sitios de aterrizaje, principalmente en sus accidentes geográficos más importantes. Más aún, Mars Trek permite navegación, visualización 2D y 3D y sobrevuelos en este planeta rojo, así como una gran cantidad de herramientas interactivas, como la posibilidad de medir distancias entre dos puntos, dibujar líneas, polígonos o formas amorfas en su superficie; permite calcular la elevación o altura de diferentes puntos; descargar imágenes 3D de cualquier sección que se desee, las cuales pueden ser analizadas después en un programa especial para ello; permite ver con nombres y sin nombres de accidentes geográficos a Marte, y lo más importante para nosotros, precisa la latitud y longitud de cada punto en Marte, pues como se vio en el apartado “Coordenadas geográficas” de la sección “Herramientas matemáticas”, las coordenadas geográficas son un sistema que permite localizar cualquier punto en un planeta mediante 2 ángulos

únicos, de modo que al querer proyectar puntos sobre Marte, se requieren en primera instancia dichas coordenadas.

Otra útil herramienta que utilizamos en el proceso fue Excel, para almacenar y ordenar los 5232 datos sobre las coordenadas geográficas, esféricas, cilíndricas y de la proyección de Marte en el plano.

También el software matemático que reúne geometría, hojas de cálculo y álgebra llamado Geogebra fue quien hizo posible visualizar la proyección y conseguir construir los ajustes necesarios para consolidar el proyecto.

Proceso de elaboración del mapa

De coordenadas geográficas a esféricas

Tal como se escribió en el apartado “Herramientas computacionales”, el portal *Mars Trek* nos proporcionó las coordenadas geográficas, sin embargo, éstas no son realmente útiles para proyectar sobre el cilindro, pues como lo vimos en “Herramientas matemáticas”, las ecuaciones deducidas funcionan para coordenadas cartesianas, sin embargo, hacer una conversión de coordenadas geográficas a coordenadas cartesianas resulta poco práctico, por lo que mejor aprovechamos que las coordenadas geográficas proporcionan ángulos, y con base en ello se creó la siguiente función:

Latitud y ángulo φ .

La latitud de un punto (denotada aquí L_a) es el ángulo comprendido entre dos meridianos y el eje perpendicular al ecuador que pasa por el centro del planeta. Recordemos que la latitud puede tomar valores entre -90° y 90° .

En coordenadas esféricas el ángulo φ es un ángulo medido entre el eje z y el segmento que une un punto sobre la superficie con el centro de la esfera. Este ángulo puede tomar valores entre 0 y π , de modo que el ecuador de la esfera se encuentra en $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Es por ello que se puede deducir una relación lineal entre ambos ángulos, donde en este caso, para verlo en el plano cartesiano, el eje X serán los valores de la latitud, y el eje Y los valores que toma φ . Así, como estamos en el plano cartesiano podemos hallar la ecuación de la recta que pasa por (Latitud 0, $\frac{\pi}{2}$) y por (Latitud 90°, 0), la cual es la siguiente

$$\varphi = -\frac{\pi}{180^\circ} L_a + \frac{\pi}{2}.$$

De este modo se puede construir una biyección que transforme la primera coordenada geográfica (proporcionada en grados) en radianes que se usen para coordenadas esféricas.

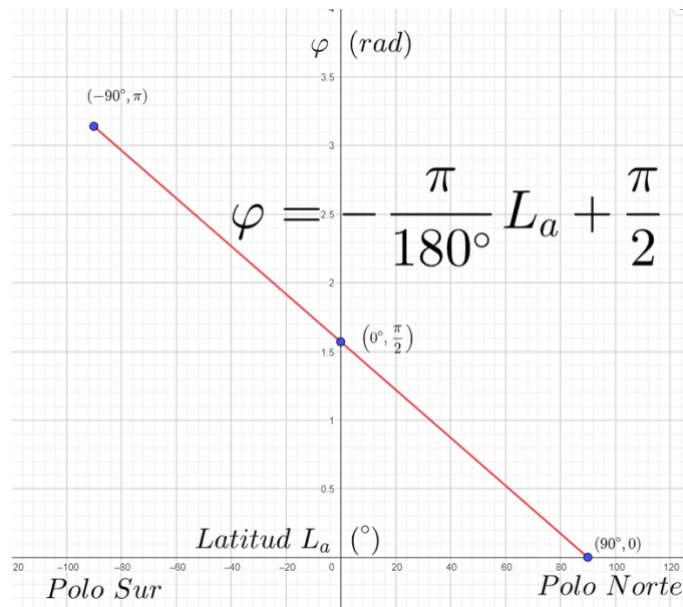


Ilustración 25. Función entre los valores que toma la latitud, y los valores que toma el ángulo φ

De esa manera, conociendo la latitud que *Mars Trek* nos proporciona, podremos obtener el ángulo φ de sus coordenadas esféricas.

Longitud y ángulo θ .

Análogamente, la longitud (denotada L_o) y la coordenada esférica θ tienen también una correspondencia de carácter lineal, pues se asocia cada grado de longitud entre -180° y 180° a θ , un número real entre 0 y 2π . De modo que, si hacemos el razonamiento anterior se llegará a

$$\theta = \frac{\pi}{180^\circ} L_o + \pi.$$

No obstante, en este caso con la longitud, si deseamos que en $L_o = 0$, θ sea 0, para que así se presente de forma convencional el mapa, ya que, en proyecciones famosas de la Tierra, el meridiano de Greenwich se encuentra a la “mitad” vertical del mapa, y así los continentes se ven continuos y no partidos.

Como para esta proyección también se desea que la vuelta al mundo de Marte se presente con el Oeste a la izquierda y el Este a la derecha, se deberá considerar la siguiente función a pedazos:

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{180^\circ} L_o + 2\pi & \text{si } L_o < 0 \\ \frac{\pi}{180^\circ} L_o & \text{si } L_o \geq 0 \end{cases},$$

la cual gráficamente se ve así:

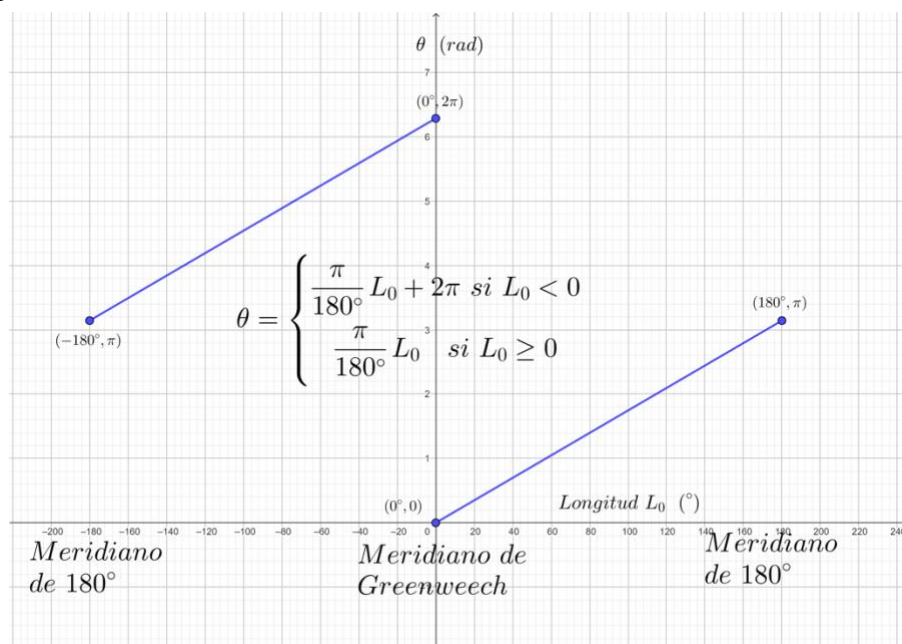


Ilustración 26. Gráfica de la relación que hay entre los valores que la longitud puede tomar, y los valores que toma el ángulo

Radio

Dado que las coordenadas esféricas tienen además una entrada para el radio (denotado por ρ), por convención y practicidad utilizaremos siempre el valor fijo de $\rho = 3.38395$, dado que el radio de Marte en la vida real es 3,389.5 km; de esa forma en el siguiente paso tendremos menos complicaciones y además nos aseguraremos de que todos los puntos estén sobre la superficie marciana.

De esa manera, todo punto que *Mars Trek* nos proporcione de manera manual, podremos escribirlo como coordenadas esféricas.

De coordenadas esféricas a cartesianas

En este punto se tiene que un valor sobre Marte ahora se ve de la forma (ρ, φ, θ) y justo como se vio en “Herramientas matemáticas”, la conversión de coordenadas esféricas a cartesianas está dada de la siguiente forma:

$$x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$$

$$z = \rho \cos\varphi.$$

Esta conversión de coordenadas esféricas se debe hacer para todo punto obtenido de *Mars Trek*, la justificación de este paso se encuentra en el siguiente paso.

Comprobación de la deducción de las funciones anteriores

Para corroborar que los pasos anteriores nos arrojan información correcta, se optó por considerar a Marte una esfera situada en el origen de \mathbb{R}^3 y con radio $\rho = 3.38395$, debido a que así, las transformaciones de coordenadas no serán tan cambiantes y el software

computacional tendrá menos probabilidades de trabarse y colapsar. Además de que así podemos crear en Geogebra un modelo a escala en megámetros de nuestro vecino rojo, en donde proyectemos paso a paso un punto con coordenadas geográficas en coordenadas cartesianas, de modo que si tomamos un punto en el oeste, en la esfera modelo de Marte, también debe encontrarse en el oeste, específicamente en su punto correspondiente en el modelo.

Creando un modelo de Marte.

Sea $M = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3.38395^2\}$ una esfera modelo de la superficie de Marte. Definimos también la intersección del plano XY con M, como su respectivo ecuador; y la intersección del plano XZ con M, como su meridiano de Greenwich. Además, llamemos $Cero=(3.38395,0,0)$, para que M esté orientada y sea fácil identificar el Norte, Sur, Este y Oeste.

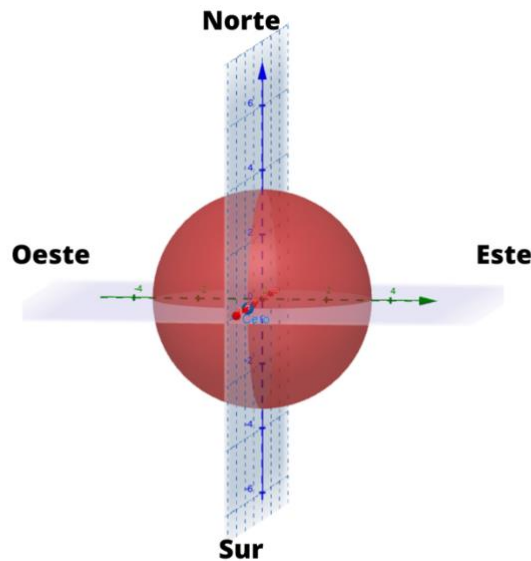


Ilustración 27. Modelo de Marte

Sea $P=(30^{\circ}N,120^{\circ}O)$ en Marte, veremos que P' está en M y que también tiene esas coordenadas geográficas.

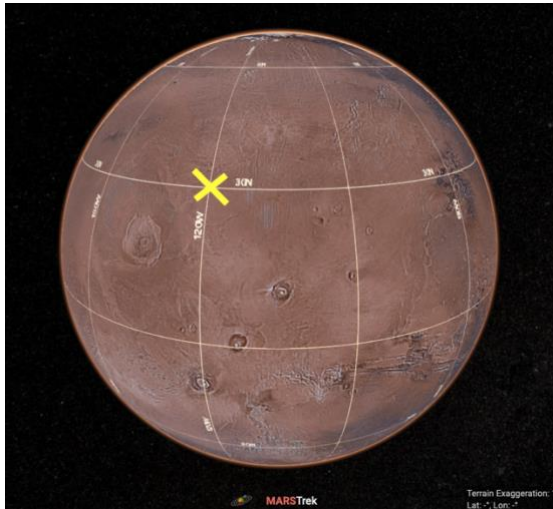


Ilustración 28. Representación tomada del simulador "Mars Trek", se indica con la intersección de los segmentos amarillos el punto P.

El primer paso es transformar P a coordenadas esféricas. Para ello, se tiene:

$$\varphi = -\frac{30\pi}{180^\circ} + \frac{\pi}{2} = 1.04719755$$

y

$$\theta = \frac{\pi}{180^\circ}(-120^\circ) + \pi = 4.1887902,$$

es decir,

$$(3.38395, 4.1887902, 1.04719755)$$

y ahora, convirtiéndolas a coordenadas cartesianas se tiene:

$$x = 3.38395 \sin(1.04719755) \cos(4.1887902) = -1.4653$$

$$y = 3.38395 \sin(1.04719755) \sin(4.1887902) = -2.5380$$

$$z = 3.38395 \cos(1.04719755) = 1.6920$$

y $(-1.4653, -2.5380, 1.6920) = P'$ se puede graficar en Geogebra y dicho punto se ve así:

Y en efecto, en la esfera modelo de la superficie de Marte en Geogebra, se muestra que sus coordenadas geográficas son $(30^\circ N, 120^\circ O)$.

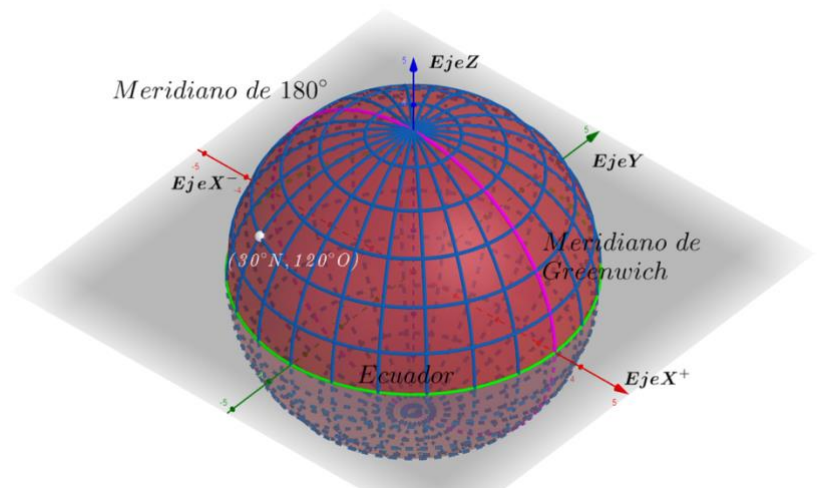


Ilustración 29. Comprobación de que el punto volvió a tener coordenadas geográficas $P=(30^\circ N, 120^\circ O)$ graficado sobre el modelo de Marte.

De coordenadas cartesianas en Modelo de Marte, a cartesianas en el cilindro

Una vez que nos aseguramos de que los puntos de Marte tienen una correspondencia en M, sigamos considerando el punto anterior y proyectémoslo en un plano.

El siguiente paso ahora es transformar esas coordenadas cartesianas en la esfera, a cartesianas en el cilindro. Usaremos la fórmula planteada en “Herramientas matemáticas” de modo que para pasar de $P' = (x, y, z)$ a (ρ, θ, z) :

$$x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-1.4654}{\sqrt{(-1.4654)^2 + (-2.5380)^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-2.5380}{\sqrt{(-1.4654)^2 + (-2.5380)^2}} = -0.8660254$$

$$z' = 1.6920$$

Y así $P'' = (-\frac{1}{2}, -0.8660254, 1.6920)$

Proyectando un punto de Marte

Una vez que se tienen las coordenadas en esa forma, sólo resta usar la deducción de proyección cilíndrica axial explicada en “Herramientas matemáticas” para finalmente, proyectar ese punto en el mapa de Marte.

$$x'' = \tan^{-1}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-0.8660254}{-\frac{1}{2}}\right) = 1.04719$$

$$y'' = z' = 1.6920.$$

Por lo tanto, la proyección de P' es $P''' = (1.04719, 1.6920)$, el cual graficado en el plano se ve de la siguiente forma:

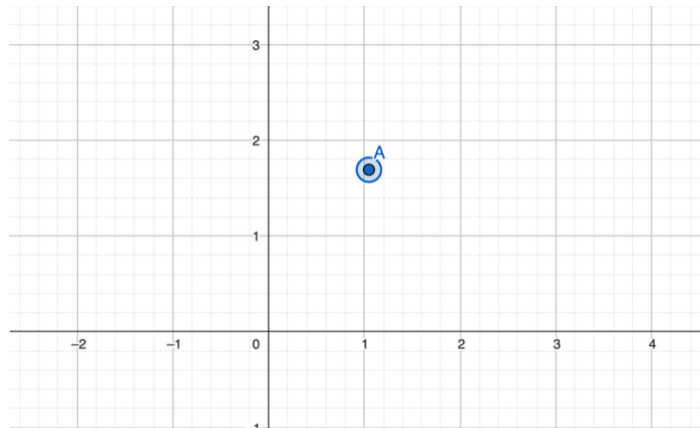


Ilustración 30. Proyección cilíndrica axial de un punto de la superficie de Marte.

Proyectando el volcán más grande de Marte

La anterior serie de pasos se repite para cada uno de los puntos que conforman un cráter de Marte. Tomemos como ejemplo el cráter *Olympus Rupes*, el cual es un enorme volcán que cambia de elevación a una corta distancia, las llanuras volcánicas inferiores de *Olympus Rupes* tienen la altura del Monte Everest, es por ello que este volcán es el más grande de Marte y por tanto, no es difícil encontrarlo al ver a Marte.

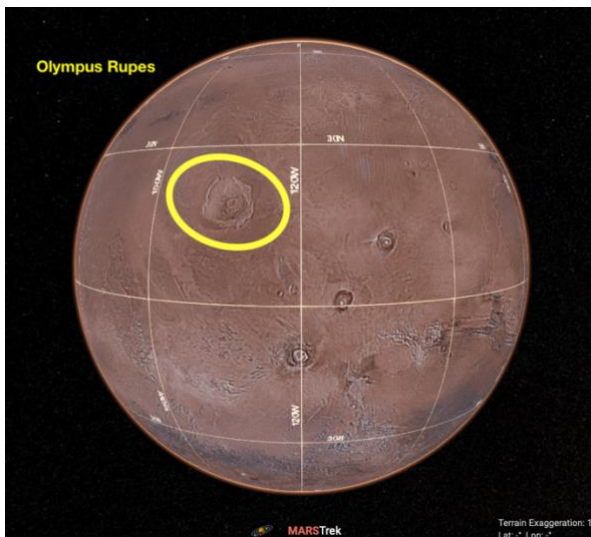


Ilustración 32. Tomada del portal web "Mars Trek", dentro de la elipse amarilla se halla Olympus Rupes.

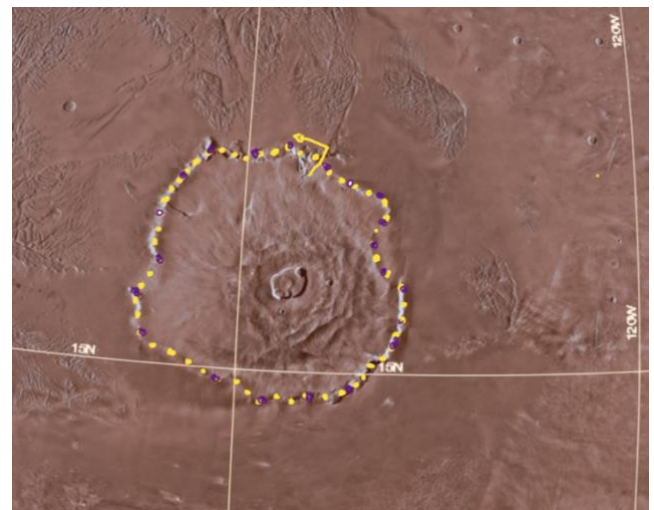


Ilustración 31. Olympus Rupes de cerca, y en su perímetro los puntos que tomamos para describirlo.

Por la cantidad de puntos que se trabajaron, se omitirá la descripción analítica de cada uno de ellos.

Sin embargo, se anexa a continuación la proyección de *Olympus Rupes*:

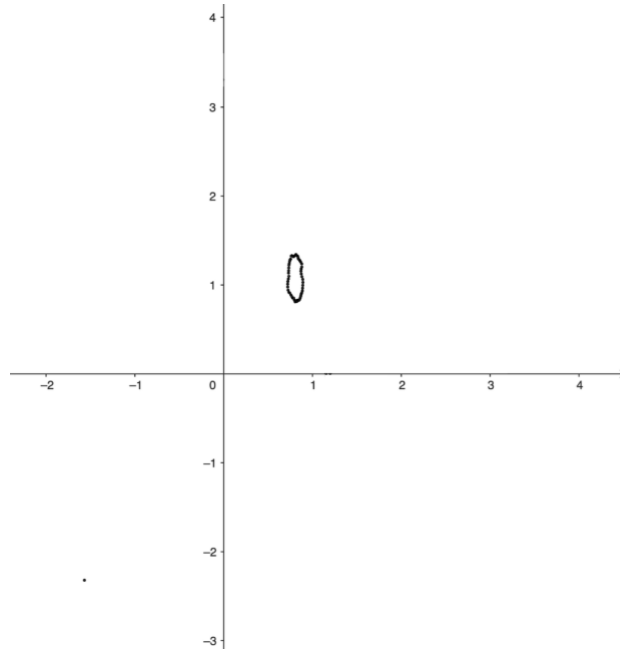
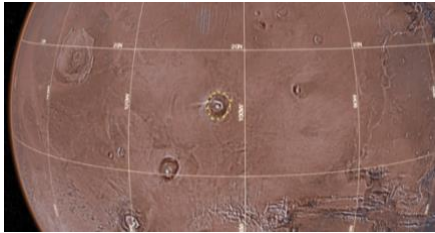
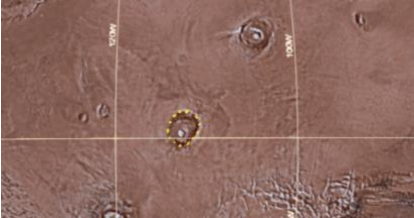
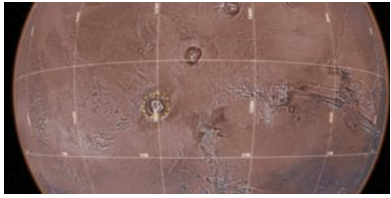
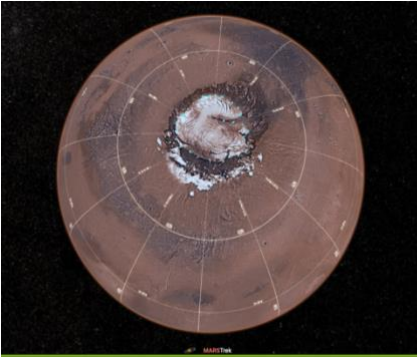



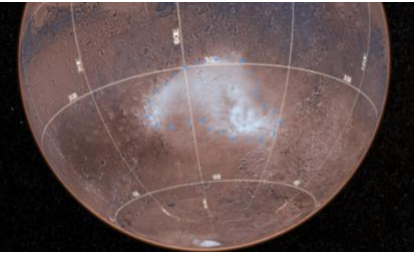
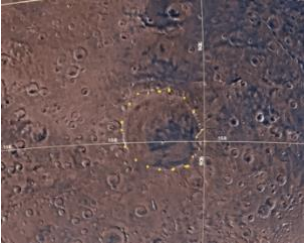
Ilustración 33. Proyección cilíndrica axial de Olympus Rupes, el volcán más grande de Marte.

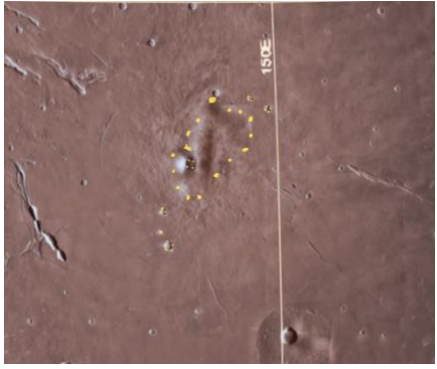
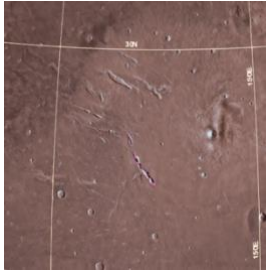
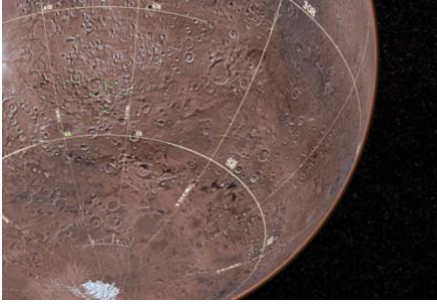
Proyección cilíndrica axial de accidentes geográficos de Marte


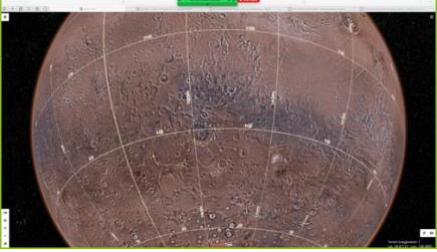
A continuación se añade una breve explicación sobre los accidentes geográficos de Marte escogidos para la proyección, (omitiendo Olympus Rupes, pues de él ya se dio una explicación).

Accidente geográfico	Breve explicación	Ilustración
Ascraeus Mons	Pertenece a los “Tres grandes Tharsis alienados” y es el más alto de ellos, pues mide 11 millas de altura, en comparación con Mauna Kea, el volcán más alto en la Tierra, Ascraeus es 10 veces más alto. Se encuentra a la derecha de Olympus Rupes y debido a las erupciones que provoca,	

	<p>crea anillos de fallas tectónicas al borde de su caldera.</p>	
Pavonis Mons	<p>Es el volcán central de los tres grandes volcanes de Tharsis, es el más pequeño de los 3 y se caracteriza por ser un “volcán de escudo” es decir, se originó cerca o en la cumbre y acumula capas de lava sobre capas de lava.</p>	
Arsia Mons	<p>Arsia Mons es el tercer volcán de “Los tres grandes volcanes Tharsis”, tiene 72 millas de ancho y 6.3 millas de altura.</p>	
Vastitas Borealis Region	<p>Es la llanura más grande de Marte, se encuentra al norte del planeta. La superficie de Vastitas Borealis es más suave y uniforme que la superficie del sur del planeta, por ello algunos científicos opinan que pudo haber estado cubierta por un gran océano en algún momento de la historia de Marte.</p>	
Milankovic	<p>Milankovic es el cráter más grande de la región Arcadia Planitia, el cual se encuentra en Vastitas Borealis.</p>	

	<p>Recibe el nombre Milankovic debido a su descubridor Milutin Milanković, quien también descubrió que sobre este cráter se encuentra una ligera capa de hielo.</p>	
<p>Hellas Planitia</p>	<p>Tiene un diámetro de 1400 millas y por ello Hellas Planitia es uno de los cráteres de impacto más grandes del Sistema Solar, y el más grande de Marte.</p> <p>Debido a su profundidad, en este punto del planeta la presión es mayor, rebasando incluso el <i>punto triple del agua</i>, el cual es un estado de equilibrio entre los 3 estados físicos del agua; por esta razón se ha teorizado que bajo ciertas condiciones de temperatura, presión y contenido de sal disuelta, aquí se puede hallar agua en estado líquido.</p>	
<p>Huygens</p>	<p>Huygens es un cráter cuyos bordes muestran signos de erosión fluvial, lo cual podría indicar que pudo haber existido un lago dentro de él.</p>	
<p>Elysium Mons Volcanic Region</p>	<p>Elysium Mons Volcanic Region es un conjunto de muchos cráteres ubicados</p>	

	<p>cerca de Elysium Mons, el cual un volcán descubierto en 1972 que, a diferencia del <i>Olympus Rupes</i> y otros volcanes, no tiene lava en su superficie, de modo que el resto de los cráteres que lo rodean también están libres de lava.</p>	
<p>Elysium Chasma</p>	<p>Es una fractura de Elysium Mons Volcanic Region. Esta fractura fue generada por la antigua actividad volcánica de la región donde se encuentra.</p>	
<p>Promethei Terra</p>	<p>Es una tierra alta del Sur del planeta y al Este de Hellas Planitia, que se encuentra llena de cráteres con una característica en común: poseen glaciares cubiertos de ligeras capas de rocas que también podrían albergar grandes cantidades de hielo.</p> <p>A causa de lo anterior, Promethei Terra se considera uno de los sitios idóneos para futuras tripulaciones humanas a Marte, pues podría ser su fuente de agua, además de que Promethei Terra se encuentra cerca del ecuador marciano, por lo que el acceso no es tan difícil como a otras ubicaciones.</p>	

<p>Coogoon Valley, Mawrth Vallis, Trouvelot, Rutherford, Becquerel, Radau, Marth</p>	<p>Son cráteres de impacto cerca de Arabia Terra, en algunos de ellos se piensa que hubo agua debido a su suelo.</p> <p>Se escogieron este conjunto de cráteres debido a su forma parecida a la de un cometa.</p> <p>No hay mucha información respecto a estos cráteres.</p>	
<p>Terra Sirenum</p>	<p>Es un conjunto de cráteres que abarca 3900 km, lo cual es aproximadamente la distancia de Nueva York a Los Ángeles.</p> <p>Se piensa que estos cráteres contienen hielo y se consideran una opción para que los robots puedan viajar y obtener agua para futuras colonias humanas marcianas.</p>	

Mapa de Marte. Mapa Mars 3202

Al momento de compilar la proyección completa, se llegó a una gran incoherencia con la orientación de los accidentes geográficos; luego de pensar mucho en el problema, se encontró la siguiente solución:

Observación respecto a la función arcotangente.

La función arcotangente solo está definida de la siguiente forma:

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & y \geq 0, x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & y > 0, x = 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & y > 0, x < 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & y < 0, x < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & y < 0, x = 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & y < 0, x > 0 \end{cases}$$

De forma que adaptando los valores de arcotangente en todos los puntos, se pudo finalmente obtener una proyección cilíndrica axial de Marte, la cual está orientada y se presenta a continuación:



Ilustración 34. Mars 3202

La proyección tiene nombres, y la línea vertical representa el meridiano mayor que divide al mapa en Este y Oeste; mientras que la línea horizontal representa el paralelo mayor, el cual divide la proyección en Norte y Sur (arriba y abajo, respectivamente).

Conclusiones

Luego de concluir el proceso de la proyección cilíndrica axial de Marte, se puede concluir que el objetivo se alcanzó ¡Se creó un mapa de Marte! Pero también se consiguió sintetizar la forma de hacer un mapa, conocer la superficie marciana y los hallazgos que brindan la posibilidad de que la humanidad pueda vivir en Marte, pero sobre todo y lo que más puede resaltar: Se hizo ver que los planetas son matemáticos y que la geometría es una maravillosa herramienta para conseguir modelar cualquier superficie, curva o región del universo.

Entre más herramientas matemáticas se posean, mayor alcance se tendrá en el proyecto, por eso me gustaría mencionar las siguientes recomendaciones para futuras proyecciones cartográficas:

- Debido a que Marte tiene cientos de miles de cráteres, el proceso manual de la proyección podría mejorar considerablemente si se diseña un programa que permita registrar automáticamente las coordenadas de los puntos obtenidos en Mars Trek, ya que para Mars 3202 el registro de coordenadas fue manual, punto a punto, lo cual consume tiempo y aumenta la posibilidad del error humano.
- Mientras que para el aspecto visual de la proyección, se puede mejorar si se fragmenta cada accidente geográfico proyectado, de modo que cada fragmento será un conjunto de puntos $A_{i \in \{1, \dots, n\} \in \mathbb{N}}$. Luego, a cada A_i se le podría asociar una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Imf = A_i$ para algún $x \in Imf$, luego restringir el dominio de f y quedarnos con $Imf = A_i$ para todo $x \in Imf$, de forma que ahora las proyecciones serán suaves y continuas.

La sociedad humana cada día conoce más la superficie marciana, lo cual es un gran paso en su misión de llegar a Marte, por ello las investigaciones dedicadas a este planeta, las cuales incluye

robots y matemáticas, serán útiles para cuando llegue el momento de estar sobre él. Así, deseo concluir con un pensamiento que tuve a la mitad del proceso de Mars 3202:

“Hacemos mapas para mandar robots que después nos ayuden a mejorar los mapas que hacemos”

Se podrán desarrollar muchas formas optimizadas para la construcción de proyecciones, y todas ellas estarán llenas de geometría, aunque no lo parezca demasiado. Espero haber contribuido a demostrar eso.

Referencias

- A todo Gauss. (2020, 12 junio). *Tus mapas están mal y Gauss lo sabe | El teorema egregio de Gauss* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=8a_cMQe-u-M
- Anguita, F. (2003). Por qué debemos ir a Marte. *Ars medica. Revista de humanidades*, 3(2), 236-251. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4370031>
- Aznar, E. R. (s. f.). *Trigonometría esférica ¿Cómo medimos sobre una esfera?* Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~eaznar/matgeo/apuntes/trig_esferica.pdf
- b. *Anaximandro*. (2018, 23 septiembre). Proyecto Telémaco. <https://proyectotelemaco.com/filosofia/presocraticos/anaximandro/>
- Baselga Moreno, S. (2014). *Vistazo a la cartografía matemática* (2.^a ed.). UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA. https://gdocu.upv.es/alfresco/service/api/node/content/workspace/SpacesStore/cb2e422d-66ee-4199-bb67-2c650d5ccf32/TOC_0607_13_02.pdf?guest=true
- BBC News Mundo. (2018, 21 diciembre). *Marte: las fascinantes imágenes de un cráter de hielo en el Planeta Rojo*. <https://www.bbc.com/mundo/noticias-46650102>
- Bienvenidos a GPS.gov*. (s. f.). <https://www.gps.gov/spanish.php>
- Carvajal, G. (2022, 31 octubre). *Authagraph, un mapa del mundo que muestra las auténticas proporciones de los continentes*. La Brújula

Verde. <https://www.labrujulaverde.com/2016/11/authagraph-un-mapa-del-mundo-que-muestra-las-autenticas-proporciones-de-los-continentes>

Centenary of the birth of Konstantin Alekseyevich Salichtchev (1905–1988). (s. f.). International Cartographic Association. <https://icaci.org/centenary-of-the-birth-of-konstantin-alekseyevich-salichtchev-1905-1988/>

colaboradores de Wikipedia. (2023a, enero 11). *Milankovic (cráter marciano)*. Wikipedia, la enciclopedia libre. [https://es.wikipedia.org/wiki/Milankovic_\(cr%C3%A1ter_marciano\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Milankovic_(cr%C3%A1ter_marciano))

colaboradores de Wikipedia. (2023b, febrero 21). *Huygens (cráter de Marte)*. Wikipedia, la enciclopedia libre. [https://es.wikipedia.org/wiki/Huygens_\(cr%C3%A1ter_de_Marte\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Huygens_(cr%C3%A1ter_de_Marte))

Conocimiento, V. A. (2019, 4 junio). *Eratóstenes: Midiendo lo imposible*.

OpenMind. <https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/eratostenes-midiendo-lo-imposible/>

Domínguez Bravo, J. (2000). *Breve Introducción a la Cartografía y a los Sistemas de Información Geográfica (SIG)*. CIEMAT (Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas). https://www.researchgate.net/profile/Javier-Dominguez-12/publication/237467702_Breve_Introduccion_a_la_Cartografia_y_a_los_Sistemas_de_Informacion_Geografica_SIG/links/0deec52724b3d7dcc4000000/Breve-Introduccion-a-la-Cartografia-y-a-los-Sistemas-de-Informacion-Geografica-SIG.pdf

Elysium Mons Volcanic Region. (1998, 20 julio). NASA Jet Propulsion Laboratory (JPL). <https://www.jpl.nasa.gov/images/pia01457-elysium-mons-volcanic-region>

Enjambres de fracturas en Marte.

(s. f.). https://www.esa.int/Space_in_Member_States/Spain/Enjambres_de_fracturas_en_Marte

GPS.gov: Space Segment. (s. f.). <https://www.gps.gov/systems/gps/space/>

Hellas Planitia. (s. f.).

NASA. https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_1659.html

Hernández López, D. (s. f.). *Geodesia y cartografía matemática*. Universidad Politécnica de Valencia. https://es.slideshare.net/Jacque_C/cartografia-matematica

Ibáñez Torres, R. (s. f.). *Un breve paseo por los mapas a lo largo de la historia* [Conjunto de datos]. Universidad del País Vasco. https://www.fespm.es/IMG/pdf/breve_paseo2.pdf

Imago Mundi de Babilonia (600 Ac) Britis Museum. (s. f.). Aryse. <https://www.aryse.org/el-mapa-mas-antiguo-del-mundo/>

Kline, Professor of Mathematics Emeritus Courant Institute of Mathematical Sciences Morris. (1985). *Mathematics for the Nonmathematician* (Illustrated). Dover Publications.

Koch, T. (2013, 28 diciembre). *Ptolomeo en la era de Google Maps*. El País-
s. https://elpais.com/cultura/2013/12/27/actualidad/1388155453_145267.html

La Geografía de al Idrisi, Tabula Rogeriana.

(s. f.). <http://www.arauco.org/sapereaude/cartografia/mapasac/tabularogeriana.html>

Lafuente, J. (1998). *GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS EN EL PLANO*. Universidad
Complutense de
Madrid. <http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/own/Manuales/Curvas%20y%20Superficies/cp.pdf>

Lascurain Orive, A. (2005). *Introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional*. Facultad
de Ciencias. UNAM.

Latitud y paralelos. (2022, 20 abril). GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/pbzbks43>

Longitud y meridianos. (2022, 21 abril). GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/tvysb54c>

M. (s. f.-a). *Arsia Mons*. NASA Mars Exploration. <https://mars.nasa.gov/resources/27205/arsia-mons/>

M. (s. f.-b). *Ascraeus Mons*. NASA Mars
Exploration. <https://mars.nasa.gov/resources/26775/ascraeus-mons/>

M. (s. f.-c). *Elysium Chasma*. NASA Mars

Exploration. <https://mars.nasa.gov/resources/26093/elysium-chasma/>

M. (s. f.-d). *Milankovic Crater Dunes*. NASA Mars

Exploration. <https://mars.nasa.gov/resources/21896/milankovic-crater-dunes/>

M. (s. f.-e). *Olympus Rupes*. NASA Mars

Exploration. <https://mars.nasa.gov/resources/26736/olympus-rupes/>

M. (s. f.-f). *Pavonis Mons*. NASA Mars

Exploration. <https://mars.nasa.gov/resources/27299/pavonis-mons/>

Madrid, S., Olvera, A., & Viveros, J. (s. f.). *Mapas y proyecciones. Notas de clase* [Conjunto de datos; Banco de Notas FENOMECE del Instituto de Investigaciones en Matemáticas aplicadas y en Sistemas de la UNAM]. <https://www.fenomec.unam.mx/?q=notas>

Mari, J. (2018, 20 enero). *El mapa más completo de la Edad Media estaba al revés*. Caminando por la historia. <https://caminandoporlahistoria.com/al-idrisi/>

Mars Trek. (s. f.). Jet Propulsion Laboratory, NASA. <https://trek.nasa.gov/mars/>

Miretti, R., Cerati, E., & Coronel, L. (2020). *Cartografía matemática*. Universidad Nacional del Litoral.

National Geographic [El mundo es matemático]. (2012). *Cuando las rectas se vuelven curvas.*

Las geometrías no euclídeas. RBA.

Pinasco, J. P., & Amster, P. (2009). *Las geometrías.* Ministerio de Educación - Instituto Nacional de Educación Tecnológica. <http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL001913.pdf>

Prieto, G. (2020a, mayo 14). *La historia de la cartografía mundial a través de los mapas.*

Geografía Infinita. <https://www.geografiainfinita.com/2016/09/la-evolucion-de-la-cartografia-a-traves-de-15-mapas/>

Prieto, G. (2020a, mayo 14). *La historia de la cartografía mundial a través de los mapas.*

Geografía Infinita. <https://www.geografiainfinita.com/2016/09/la-evolucion-de-la-cartografia-a-traves-de-15-mapas/>

Ramírez Galarza, A. I. (2016). *Introducción a la geometría avanzada* (3.^a ed.). Facultad de Ciencias. UNAM.

Saldaña, E. F. (2017, 14 septiembre). *Desarrollo de aplicación emisora de localización global*

GPS para dispositivos con Windows Mobile como sistema operativo. <http://148.210.21.138/handle/20.500.11961/3210>

Sevilla, M. J. (1986). *Cartografía matemática: Vol. II.* Instituto de Astronomía y

Geodesia. <https://core.ac.uk/download/pdf/36036064.pdf>

Terra Sirenum. (s. f.). Marspedia. https://marspedia.org/Terra_Sirenum

Apéndice

A continuación, se anexan enlaces con archivos de GeoGebra utilizados para la proyección de Mars 3202, los cuales pueden editarse para que el lector haga sus propios experimentos si así lo desea.

Proyecciones estereográficas

- De un triángulo: <https://www.geogebra.org/calculator/mkp6ebwc>.
- De un cardioide:
 - Situado cerca del Ecuador: <https://www.geogebra.org/calculator/zgpkp5mh>.
 - Situado en el Polo Norte: <https://www.geogebra.org/calculator/vegsmdjv>

Proyecciones cilíndricas

- De un triángulo: <https://www.geogebra.org/calculator/mkp6ebwc>,
<https://www.geogebra.org/calculator/qhewpcev>
- De un cardioide:
 - Situado cerca del Ecuador: <https://www.geogebra.org/calculator/zgpkp5mh>,
con <https://www.geogebra.org/calculator/yck6rxyf>

Modelo a escala de la superficie de Marte

- Con coordenadas geográficas y orientado: <https://www.geogebra.org/classic/mnkqpfnx>